



Tommaso, Dante, Florenskij

L'ipersfera n -dimensionale al confine fra
Scienza e Teologia

Gianfranco Basti

Faculty of Philosophy – Pontifical Lateran University – www.irafs.org

IRAFS website: www.irafs.org



IRAFS

The International Research Area on Foundations of the Sciences (IRAFS) was constituted at the Pontifical Lateran University (PUL) in October of 1997. In seventeen years of activity, the Area has promoted at the Lateran University, several conferences, courses and debates, overall through its active participation in the STOQ Project.

IRAFS

c/o Prof. Gianfranco Basti
Pontifical Lateran University
Piazza S. Giovanni in Laterano, 4
00120 Vatican City

Ph.: ☎ +39 06 69895671

Fax: +39 06 45420209

emails: basti@pul.it

info@irafs.org

<http://www.irafs.org>



IRAFS

INTERNATIONAL RESEARCH AREA
ON FOUNDATIONS OF THE SCIENCES

Welcome to the IRAFS Portal

The IRAFS - *International Research Area on Foundations of the Sciences* - is the first of the research areas based at the Pontifical Lateran University. Its official foundation dates back to October 1997, just about a year away from the premature death of him who was the first promoter and founder of the Area: ENNIO DE GIORGI. Professor at the "Scuola Normale Superiore di Pisa", Member of the "Accademia dei Lincei" in Italy, of the "Académie de France", of the "National Academy of Sciences in US, and of the "Pontifical Academy of Sciences" in Vatican, he was one of the greatest mathematicians of the twentieth century.

▶ Professor De Giorgi...

▶ IRAFS was founded...

▶ The various disciplines...



News

[Show All](#). Mouse over to stop.

workshop on "Ontos & Logos"

PUL, Room "Pope Francis"
February 9th, 2016 - h. 15-17

Presentation of the new book:
Ontologia Formale, G. Basti, S. Mobeen, APES Ed., Rome, 2015, with contributions of Habermas, Searle, Ales Bello, Basti, Kanakappally, Poli, Mobeen, Giovagnoli.

Presenters: A. Iodice, G. Traversa, D. Santoro.

Chair: Ph. Larrey

[More...](#)

© 2014-2020 IRAFS - THE INTERNATIONAL AREA ON FOUNDATIONS OF THE SCIENCES

Premessa cosmologica

Relatività Speciale, Generale, Causalità Fisica e la Struttura dello Spazio-Tempo

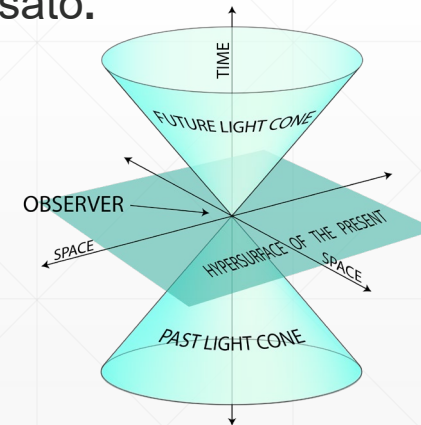
Relatività Speciale, la struttura dello spazio-tempo e il principio di causalità fisica

La velocità finita della luce

- **Principio di relatività di Galilei-Newton:**
 - Leggi **meccanica** uguali per tutti i sistemi riferimento **inerziali**.
 - Indistinguibilità fra due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme fra di loro
 - → Suppone la **simultaneità assoluta** fra eventi fisici a qualsiasi distanza e quindi la **natura euclidea** dello spazio fisico.
- **Principi della relatività speciale di Einstein (1905):**
 1. Leggi **meccanica, elettromagnetismo, ottica** uguali per tutti i sistemi riferimento **inerziali**.
 2. La luce si propaga nel **vuoto a velocità costante c** indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore.
 - Interdipendenza delle misure di intervalli temporali e di lunghezze spaziali → necessità di rappresentazione dei fenomeni fisici in un'unica **struttura spazio-temporale quadridimensionale (cronotopo)**.

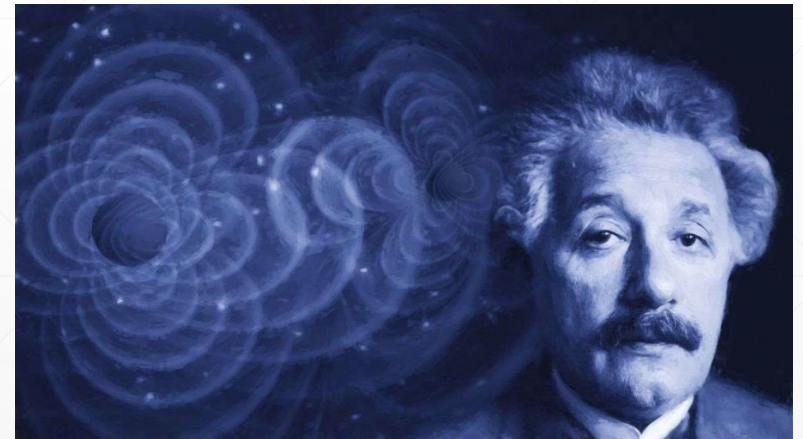
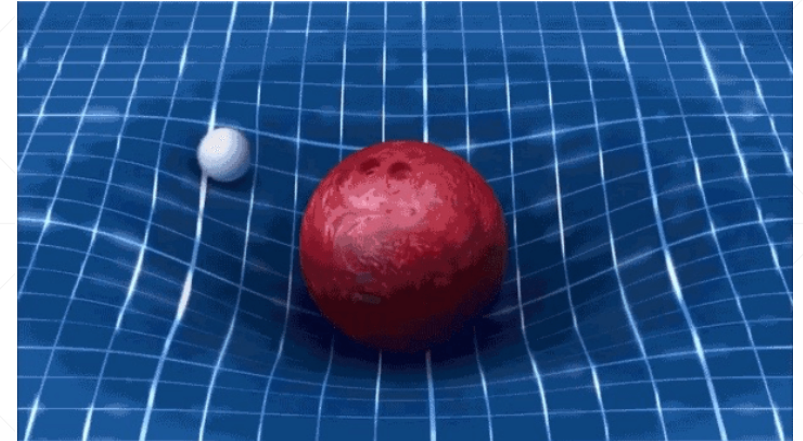
Principio di causalità fisica: il cono di luce

- Essendo c la velocità massima di propagazione di qualsiasi segnale fisico, solo eventi fisici entro il **cono di luce in uno spazio-tempo di Minkowski** possono essere in **relazione causale** fra di loro → tempo **grandezza complessa** definita sui **reali** verso il futuro e sugli **immaginari** verso il passato.



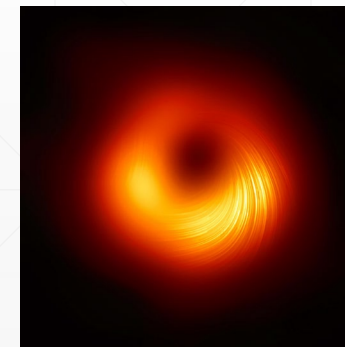
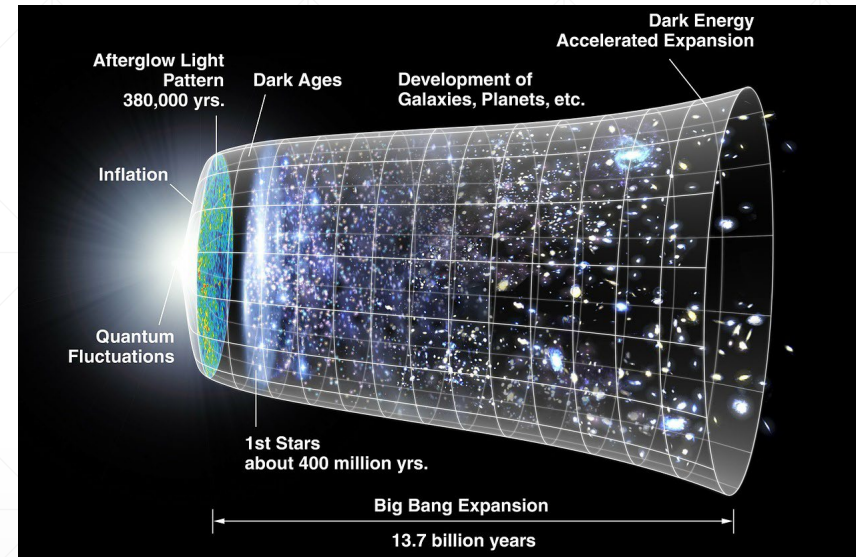
Estensione della Relatività Speciale alla forza gravitazionale: la Relatività Generale

- L'estensione dei principi della RS alla **forza gravitazionale** fra corpi celesti nell'universo → incompatibile con **la struttura euclidea** della rappresentazione newtoniana dello spazio-tempo e compatibile con **la struttura ellittica** della **3-sfera di Klein**.
- **1915**: Einstein propone la sua famosa **equazione di campo** che descrive la gravità come **curvatura dello spazio-tempo** che costituisce il cuore della **Relatività Generale (RG)** → maggiore precisione della teoria newtoniana nel prevedere **la precessione del perielio di Mercurio**.
- **1916**: Einstein propone l'idea dell'**onda gravitazionale** che si propaga con velocità c la cui esistenza è stata confermata sperimentalmente nel **2016**.
- **1919**: Clamorosa verifica sperimentale da parte di Arthur Eddington che durante un'eclissi di sole nell'isola di Principe predice la **flessione dei raggi luminosi di una stella** in presenza del campo gravitazionale del sole.



Modello dinamico dell'universo e teoria del «Big-Bang»

- Durante gli anni '20 Einstein si impegnò nel tentativo di escludere il **carattere dinamico** (in contrazione o in espansione) dell'universo relativistico compatibile con la RG e introdusse nelle sue equazioni la **costante gravitazionale** per garantirne la staticità.
- **1929-1931:** le scoperte sperimentali di Edwin Hubble dimostrano l'**espansione dell'universo** confermando l'ipotesi di **George Lemaître** del cosiddetto **Big-Bang**.
- **1965:** lavori di Roger Penrose sul **collasso del campo gravitazionale** formazione di singolarità nello spazio-tempo relativistico definite da John Archibald Wheeler nel 1967 **buchi neri**.
- **Ultimi decenni:** necessità di integrare la RG con la MQ → teoria della **gravitazione quantistica**.



Dante, Einstein, Florenskij

... E i viaggi in un universo sferico relativistico

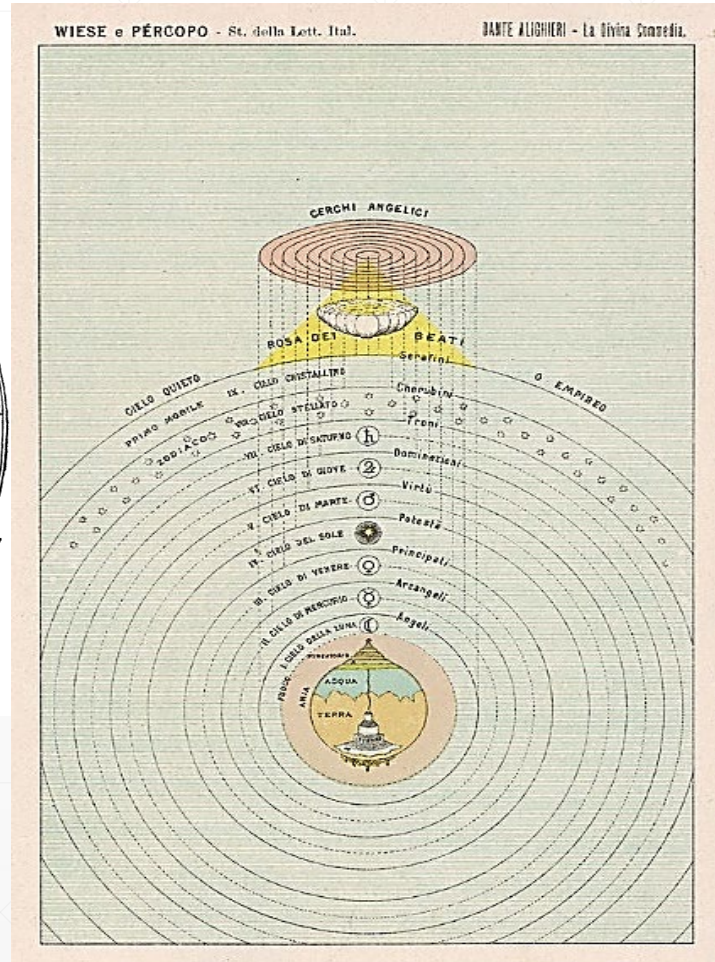
«La Geometria degli Immaginari» di Florenskij

- In un passo fondamentale della sua opera *La geometria degli immaginari* Florenskij sintetizza la sua visione fisica e metafisica della materia che ha nella **natura complessa dello spazio** e nella **natura discreta non-puntiforme** della materia, perché potesse manifestare una sua «interiorità», la sua matematica.
 - *«Potremmo dunque immaginarci lo spazio come **doppio**, in quanto costituito da superfici dei **reali** e da quelle degli **immaginari** con esse coincidenti nelle **coordinate di Gauss** (coordinate cartesiane complesse definite sull'asse reale e immaginario), ma il passaggio dalla superficie reale a quella immaginaria sarà possibile solo attraverso uno **squarcio** nello spazio e tramite l'**estrofia** del corpo attraverso sé stesso. Per il momento non abbiamo altro modo per ipotizzare tale processo che l'aumento della velocità massima c , ma non abbiamo prove per sostenere l'impossibilità di un qualsiasi altro modo» (p. 132).*
 - «L'altro modo» **senza violare c e la continuità dello spazio («senza squarci»)** ma **discretizzando, quantizzando la materia (massa-energia)**, come desiderava Florenskij, per il **principio di indeterminazione** lo fornirà lo sviluppo della MQ e del formalismo degli **spazi di Hilbert (1931)**. Essi sono definiti sui **numeri complessi** perché dotati di una **struttura interna** basata sulla **dualità** fra la distribuzione di probabilità (gaussiana) di una delle due variabili canoniche (**posizione x** e **momento p**) con la **trasformata di Fourier** della distribuzione di probabilità dell'altra (\hat{p}_x e \hat{x}_p rispettivamente) in base alla **relazione di commutazione** $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ dove l'unità immaginaria appare insieme al quanto di Planck.
 - Florenskij non aveva a disposizione la MQ ma la sua genialità consiste nell'aver individuato nella **struttura interna-esterna/immaginari-reali** del cosmo dantesco un'anticipazione pre-scientifica della **struttura ellittica della 3-sfera** dello spazio-tempo relativistico.
-

La struttura complessa del cosmo dantesco

- Il cosmo dantesco ha una **struttura complessa** basata su una lettura cristiana (tomista) del **cosmo sferico geocentrico** di Eudosso-Aristotele.
- Il cosmo aristotelico era composto di **nove sfere geocentriche** ognuna governata da una **intelligenza separata** che era il fondamento ontologico della **simmetria delle leggi matematiche** che governano i moti delle diverse sfere celesti.
- Dante** genialmente ripensa questa struttura alla luce della **metafisica cristiana** che ci insegna che Dio è **trascendente per natura**, ma **immanente con la sua azione** creatrice e provvidenziale.
 - Costruzione del cosmo come **due sfere fisica e spirituale** ciascuna composta di nove sfere concentriche **reciprocamente tangenti in ogni punto** così da **includersi e corrispondersi reciprocamente** e aventi come centro l'una la **terra** e l'altra **Dio**.

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.



I due viaggi di Dante «dentro» (con Virgilio) e «intorno» (con Beatrice) al cosmo

Inferno, XXXIV, 74-94; 133-139

*Ma la notte risurge, e oramai
è da partir, ché tutto avem veduto».
Com'a lui piacque, il collo li avvinghiai;
ed el prese di tempo e loco poste;
e quando l'ali fuoro aperte assai,
appigliò sé alle vellute coste:
di vello in vello giù discese poscia
tra 'l folto pelo e le gelate croste.
Quando noi fummo là dove la coscia
si volge, a punto in sul grosso de l'anche,
lo duca, con fatica e con angoscia,
volse la testa ov'elli avea le zanche,
e aggrappossi al pel com' om che sale,
sì che 'n inferno i' credea tornar anche*

Paradiso, I, 47-54; 64-66; XXX, 10-13.

*Quando Beatrice in sul sinistro fianco
vidi rivolta e riguardar nel sole:
aguglia sì non li s'affisse unquanco.
E sì come secondo raggio suole
uscir del primo e risalire in suso,
pur come pelegrin che tornar vuole,
così de l'atto suo, per li occhi infuso
ne l'immagine mia, il mio si fece,
e fissi li occhi al sole oltre nostr'uso.
(...)
Beatrice tutta ne l'etterne rote
fissa con li occhi stava; e io in lei
le luci fissi, di là sù rimote.
(...)
sempre dintorno al punto che mi vinse,
parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude.*

La struttura ellittica del cosmo dantesco e relativistico

- Premessa: come lo spazio euclideo della fisica galileiana-newtoniana è uno **spazio di rappresentazione matematica** delle proprietà strutturali intrinseche (topologia) dell'universo newtoniano, non di rappresentazione empirica di esso (non siamo «terraplattisti») così lo **spazio non-euclideo, sferico (di Riemann) ellittico (di Klein)** dell'universo einsteiniano – ma anche incredibilmente! – dantesco.
- Di questo rapporto Dante-Einstein il primo ad accorgersene fu Florenskij (ma la sua opera rimase sconosciuta in occidente fino a dopo gli anni '50), seguito poi indipendentemente da altri matematici come A. Speiser (1925), H. Weyl (1932), fino ai più recenti lavori J.J. Callahan (1976); M. Peterson (1979) che dischiuse queste scoperte ai fisici come H.R. Patapievici (2004); anche italiani come C. Rovelli (2014); E. Bersanelli (2016).
- Di solito però questi scienziati restarono colpiti dalla chiara analogia con la costruzione della 3-sfera relativistica della visione del *Paradiso* dantesco e quasi nessuno della sua coerenza col viaggio «dentro» il cosmo che invece è il punto di partenza dell'analisi di Florenskij.

Dante, Einstein e i viaggi nell'universo sferico

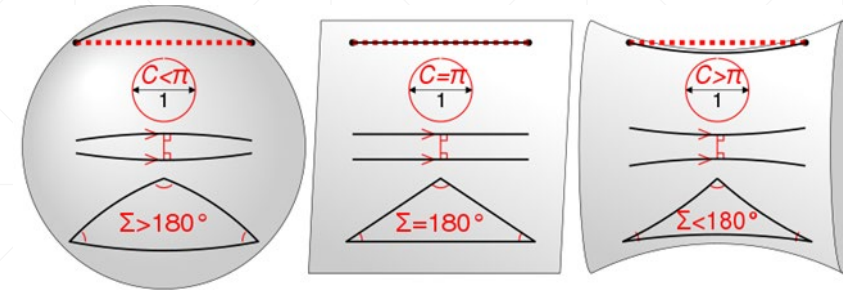
- Sono le 3:30 circa del mattino di sabato quando Virgilio dà le spiegazioni sul centro della terra a Dante. Era sabato pomeriggio quando hanno visto Luci-fero, dopo un viaggio di circa 24 ore nell'Inferno. Trovandosi ora nell'emisfero australe – e non certo per effetto del fuso orario che va da est a ovest e non da nord a sud: a Roma è la stessa ora che a Città del Capo –, poiché sono passati attraverso il centro della terra sono andati indietro di 12 ore. Sulle coste del Purgatorio invece arriveranno nelle prime ore del mattino di domenica.
- Ma allora cosa è successo?
- È successo che per Dante come per Einstein non solo la terra, ma anche l'universo è sferico. E quando si ragiona su uno spazio-tempo sferico non si può “come la gente grossa” ragionare nei termini della geometria euclidea dello spazio piano dove le rette e quindi le traiettorie spazio-temporali dei corpi in movimento si **propagano all'infinito**. Niente di tutto questo è vero in un universo sferico (ellittico) come quello dantesco, ma anche come quello einsteiniano della moderna cosmologia dove tutto si propaga a **velocità finita** e dove dunque le linee di propagazione dovranno essere per forza rette «chiuse» in una «superficie di Riemann» cioè delle **curve su uno spazio sferico**.
- L'universo non-euclideo insomma è **finito anche se illimitato**. Ecco il punto di contatto ontologico Dante-Einstein!

L'universo dantesco

- Come sappiamo, Dante seguiva in questo la cosmologia sferica che Aristotele aveva mutuato dal suo “compagno di banco” all'Accademia ateniese di Platone. **Il grande matematico Eudosso** che, secondo la testimonianza di Archimede, aveva scoperto il concetto di “numero infinitesimale” e aveva per primo calcolato il valore di “ π -greco” come rapporto fra la circonferenza e il suo diametro.
- Secondo questa cosmologia, l'universo era **composto da tante sfere concentriche con al centro la terra**, sfere composte di **materiale cristallino trasparente** (il famoso “etere” o “quinto elemento”) in cui stelle e pianeti erano in-fissi “come chiodi in delle ruote” che giravano secondo versi opposti e facevano sì che, per attrito, stelle e pianeti si surriscaldassero divenendo luminosi nel cielo. Non esiste il **vuoto meccanico** di Democrito e Newton nell'universo aristotelico!
- Non è un caso, dunque, che in diversi scritti di Aristotele **si trovino dubbi circa il famoso “quinto postulato” di Euclide**, quello delle parallele, che all'infinito non si incontrano. Il che evidentemente è vero solo nello spazio piano (a curvatura nulla) di Euclide, ma non sullo spazio curvo dell'universo di Eudosso e di Aristotele, ma anche di Riemann, di Klein e di Einstein.

Geometria non-euclidea e teorema di Pitagora

- Conseguenza diretta del quinto postulato è infatti **il teorema di Pitagora** da cui si trae la conseguenza che **la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti (180°)**, il che non è vero in un triangolo disegnato su uno spazio curvo che sarà maggiore di 180° nello spazio curvo a curvatura positiva (ellittico) e minore di 180° nello spazio a curvatura negativa (iperbolico).
- Così non deve sorprendere che in diversi scritti di Aristotele si ponesse in dubbio proprio questo teorema della geometria euclidea **di cui non casualmente è ben cosciente Dante** quando, nel Canto XIII, 101 del Paradiso, fa chiedere al Signore da parte di un ansioso re Salomone che gli risolvesse il dubbio *se del mezzo cerchio far si puote triangol sì ch'un retto non avesse.*



Sinistra: Geometria ellittica a curvatura positiva dello spazio sferico dove le parallele si incontrano e dove la somma degli angoli interni del triangolo è maggiore di 180° . **Centro:** geometria euclidea dello spazio piano a curvatura nulla dove le parallele non si incontrano e dove la somma degli angoli interni del triangolo è uguale a 180° . **Destra:** geometria iperbolica dello spazio a sella a curvatura negativa dove le parallele divergono e la somma degli angoli interni del triangolo è minore di 180° .

La 3-sfera o ipersfera quadridimensionale di Klein

- Dunque, ciò che è paradossale ma vero è che sebbene l'astrofisica moderna di Copernico, Keplero, Galilei e Newton **abbiano clamorosamente confutato l'ipotesi geocentrica della cosmologia aristotelica**, l'attuale cosmologia ispirata alla RG conferma sia teoricamente che (almeno in parte) sperimentalmente che lo spazio-tempo dell'universo **ha una struttura matematica sferica (ellittica)** come sosteneva la cosmologia medievale e in particolare quella dantesca.
- Infatti, la struttura dantesca del cosmo nel suo insieme, “dentro” e “fuori” di essa – ed è questa la scoperta più sconvolgente fatta dai fisici e matematici contemporanei –, manifesta la stessa struttura spazio-temporale “interna” ed “esterna” di una **“ipersfera quadri-dimensionale”, o “3-sfera”** in uno spazio ellittico di Klein.
- Quindi, se vogliamo capire le strane proprietà spazio-temporali del viaggio di Dante con la sua guida Virgilio, passando “dentro” il centro l'universo sferico aristotelico, la Terra, dobbiamo innanzitutto capire le forse ancor più strane proprietà del viaggio di Dante con la sua guida Beatrice **“lungo il bordo” dell'universo sferico dantesco**.
- Avendo sotto i loro piedi le diverse sfere concentriche che lo compongono e, ultima e più piccola di tutte la sfera terrestre, e, sopra le loro teste, **la struttura a sfere concentriche delle sfere angeliche (Dionigi l'Aeropagita) dell'Empireo** con al centro il “punto luminosissimo” di Dio.

L'ascesa di Dante attraverso lo sguardo di Beatrice

- Infatti, cosa scoprono meravigliati Dante e Beatrice? Una volta raggiunto il bordo inferiore della sfera più esterna, la nona, dell'universo aristotelico, Dante guardando in basso, dirige il proprio sguardo verso gli occhi di Beatrice e qui il poeta, come ancorato dall'amore allo sguardo di lei, può ascendere al Nono cielo e contemplare **la fuga vertiginosa dei cieli, con in fondo, piccolissima, la Terra.**
- Poi Beatrice suggerisce a Dante di guardare verso l'alto, cioè "fuori" dal chiuso universo aristotelico, dove non dovrebbe esserci nulla, perché **per Aristotele l'Universo ha un bordo estremo dove tutto finisce.** Non così nella visione cristiana della cosmologia aristotelica da parte di **Tommaso d'Aquino**, dove il "nulla" grazie all'atto creativo di Dio non esiste – come già Parmenide aveva insegnato ai Greci: "il non-essere non è e non può essere" – e **dove finisce l'essere (la sfera) del mondo creato fisico non c'è il nulla, ma comincia l'essere (la sfera) del mondo creato spirituale,** con le due sfere che si includono reciprocamente così che **Dio può essere "centro" e "sorgente" di ambedue le sfere.**
- Qualcosa che **non** può essere rappresentato iscrivendo sfere **in uno spazio piano euclideo,** ma – e qui la sua genialità poetica e razionale insieme – **ma in uno spazio ellittico.** Una costruzione geometrica (topologica) rigorosa che Tommaso non aveva a disposizione, ma Einstein sì grazie al lavoro del matematico tedesco Klein.

La rappresentazione geometrica dantesca dell'immanenza-trascendenza divina

- E così, Dante alza lo sguardo, sempre ancorato dall'amore allo sguardo di Beatrice, ed è folgorato da un punto di luce abbagliante – Dio – circondato da nove immense e luminose sfere angeliche.
- E dove si trova questa nuova struttura sferica del “mondo spirituale” composta come la struttura sferica del “mondo fisico” di nove sfere concentriche? Dante lo dice in maniera sublime nel Canto XXVII, 112 del Paradiso. Questa altra parte dell'Universo

*d'un cerchio lui comprende,
sì come questo li altri*

- per poi spiegare tre cantiche dopo (Canto XXX, 12-13) la proprietà più sconvolgente di questa ulteriore sfera di sfere concentriche:

*sempre dintorno al punto che mi vinse,
parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude*

La genialità di Dante

- Per “gente grossa”, come li definisce Dante, questa immagine di due insiemi di sfere concentriche ciascuno dei quali include l’altro, così che ogni punto dell’una è in corrispondenza con il centro dell’altra, sembra solo un’oscura e assurda licenza poetica, ma, come notava il mio amico, il fisico Carlo Rovelli,
 - *Per un matematico o un cosmologo di oggi, la descrizione della forma dell'Universo data da Dante è perfettamente trasparente, e l'oggetto descritto da Dante è inconfondibile. Si tratta di una "tre-sfera" la for-ma che nel 1917 Albert Einstein ha ipotizzato essere la forma dello spazio-tempo del nostro universo, e che oggi resta compatibile con le più recenti misure cosmologiche. La sfrenata fantasia poetica e la straordinaria intelligenza – direi, coerenza logica di Dante Alighieri nel pensare alle conseguenze di concepire l'universo in uno spazio sferico finito e non in uno spazio piano infinito euclideo – continua Rovelli, hanno anticipato di sei secoli una geniale intuizione di Albert Einstein sulla forma che il nostro universo potrebbe avere.*

Curvatura dello spazio-tempo e finitezza delle velocità

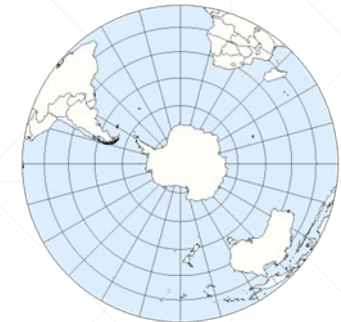
- Ma cos'è una “tre-sfera” o “ipersfera”? È una costruzione geometrica quadri-dimensionale nello spazio sferico (ellittico) di Klein che non è possibile disegnare nello spazio tridimensionale della nostra intuizione euclidea, un po' come è difficile rappresentare la superficie sferica tridimensionale della Terra su una carta geografica piana, bidimensionale.
- Seguendo sempre il suggerimento di Rovelli, per capire, immaginiamo innanzitutto di camminare sulla Terra sempre nella medesima direzione, “est-ovest” o “nord-sud”: non incontreremo mai “il bordo” della terra – né tantomeno “cadremo giù” da esso come un terrapiattista si aspetterebbe –, ma neanche incontreremo all'infinito paesi sempre nuovi. **Semplicemente, alla fine, torneremo al punto di partenza.**
- Infatti, la struttura matematica dello spazio curvo (ellittico o a curvatura positiva), non solo **viola il quinto postulato** delle parallele di Euclide **ma anche il secondo** quello per cui si può prolungare all'infinito un segmento di retta. Su uno spazio sferico un “segmento” - che avrà la forma di un “arco” (geodetica) - può essere sì **prolungato illimitatamente** senza mai incontrare “il bordo” dello spazio che ne delimitasse lo sviluppo. Ma “la retta” risultante **non sarà infinita come sullo spazio piano euclideo bensì sarà necessariamente “finita”**: alla fine **sarà una linea curva che si richiude su se stessa**, perché è come una circonferenza disegnata sulla superficie di una sfera.
- **In una parola il nostro universo è “finito, ma illimitato”** per chiunque voglia viaggiare in esso nello spazio e dunque impiegando del tempo, **visto che nulla viaggia a velocità infinita.**

1-sfera, 2-sfera, 3-sfera

- Più esattamente, nel linguaggio della geometria dello spazio curvo, la **“topologia”** o **“forma intrinseca” della terra è una “due-sfera”** (perché sulla Terra si può camminare o disegnare circonferenze in due direzioni perpendicolari: “est-ovest” e “nord-sud”, ovvero “paralleli” e “meridiani”) proprio **come un “cerchio” nello spazio curvo ellittico è un “disco”, ovvero una “uno-sfera”**: possiamo disegnare una circonferenza camminando in una sola direzione, “destra-sinistra”.
- Per capire allora perché la **struttura intrinseca** (topologia) del nostro Universo come di quello dantesco è una **3-sfera perché ambedue finiti** facciamo un secondo passo. Il moto matematicamente è il **rapporto spazio-tempo s/t** . Per avere velocità infinite dovremmo porre **$t = 0$** ma siccome la velocità di qualsiasi segnale fisico in base alla RS è comunque **finita e quindi suppone $t \neq 0$ (>0 sui reali per una velocità che va in avanti nel cronotopo spazio-tempo, <0 sugli immaginari per una velocità che torna indietro)** il cronotopo relativistico quadridimensionale corrisponde a una **3-sfera**.

Rappresentazione proiettiva di una n-sfera

- Per poterci rappresentare la struttura di una tre-sfera e avvicinarci così alla geniale intuizione dantesca dei due universi sferici che si includono l'un l'altro, i fisici e i matematici, Rovelli compreso, suggeriscono sempre **un'analogia di facile comprensione**.
- Quando dobbiamo disegnare una **carta geografica** (ovvero su un piano) della superficie sferica tri-dimensionale terrestre (due-sfera), la tecnica che si usa è quella di rappresentarla **con due emisferi, due dischi (uno-sfere) bidimensionali**, uno con i continenti dell'emisfero nord, l'altro con i continenti dell'emisfero sud.



Rappresentazione bidimensionale della sfera tridimensionale (due-sfera) terrestre mediante i “dischi” (uno-sfere) dei due emisferi, **nord, boreale (sinistra), e sud, australe (destra), rispettivamente**. Ci saremo accorti che per rappresentare una n-sfera ($n = 1, 2, 3, \dots$) occorre sempre uno spazio con $n+1$ dimensioni, oppure sdoppiare la n-sfera per poterla rappresentare in uno spazio con $n-1$ dimensioni. Proprio come quando ci hanno insegnato a fare le proiezioni sullo spazio piano euclideo alle scuole medie. Per fare le proiezioni di un oggetto tri-dimensionale ($n = 3$) occorrono due proiezioni bi-dimensionali ($n = 3-1 = 2$).

Il viaggio di Dante «sulla» 3-sfera

- L'equatore, continua Rovelli, «è disegnato due volte **come il bordo di entrambi i dischi**. Se partiamo dal polo sud e camminiamo verso nord a un certo punto attraversiamo l'equatore e 'saltiamo' sull'altro disco. Di fatto però **non facciamo nessun salto** perché nella realtà l'emisfero nord per chi guarda dal polo sud 'circonda' l'emisfero sud, come l'emisfero sud 'circonda' l'emisfero nord per chi guarda da nord».
- La “tre-sfera” o “ipersfera quadridimensionale” **può essere analogamente rappresentata come l'unione di due “palle”**. Una “palla” è come “l'emisfero sud” della tre-sfera, l'altra è come “l'emisfero nord” della tre-sfera. La **“sfera equatoriale”** che separa e connette i due emisferi è disegnata due volte come “il bordo” delle due palle. E per Dante seguendo il suo maestro Tommaso, questo «equatore» è **l'uomo «linea d'orizzonte» che separa e connette insieme i due mondi** fisico e spirituale, proprio come Dante e Beatrice quando contemplanò sul bordo dell'universo fisico i due mondi fisico e spirituale.
- Un viaggiatore che partisse come Dante dal centro della prima palla di sfere concentriche – la terra dell'universo aristotelico – e risalisse “di sfera in sfera” fino a questo equatore, vedrebbe sotto di sé un insieme di (nove, nella cosmologia aristotelica) sfere concentriche con al centro la sfera terrestre e sopra di sé un altro insieme di (nove) sfere concentriche (di angeli) che si richiuderebbero intorno a un punto. «Quest'altro emisfero, conclude Rovelli, allo stesso tempo 'circonderebbe' e 'sarebbe circondato' dalla prima palla. **In altre parole, la migliore rappresentazione della tre-sfera è quella che ne dà Dante**», come oggi ogni fisico e matematico bene informato è disposto a riconoscere. Allo stesso tempo da qualsiasi punto del bordo della prima sfera **vedrebbe direttamente il centro dell'altra sfera**, proprio come Dante è abbagliato dalla luce di Dio.

I motivi dell'intuizione dantesca

1. Innanzitutto, nota Rovelli, «l'immaginazione spaziale di Dante non era ancora ingabbiata nel rigido immaginario newtoniano per il quale lo **spazio fisico è euclideo e infinito**». Per Dante come per Aristotele e per la fisica contemporanea **lo spazio-tempo è finito** ed è costituito dalla “struttura”, dal “tessuto” delle relazioni reali o “forze” (cause) fra le cose. Ovvero, lo spazio-tempo nell'universo è costituito dalla **struttura del campo forza gravitazionale che «tiene insieme»** i corpi celesti (galassie, stelle, pianeti) che lo costituiscono (cfr. «**energia del vuoto**»: newtonianamente una bestemmia!). Forza che si propaga a **velocità finita**.
2. Secondariamente, Rovelli ipotizza un **motivo architettonico**: mosaici sulla volta del Battistero di Firenze → effetto dei due emisferi.
3. Ma c'è un motivo più profondo: **struttura metafisica** delle relazioni causali (**Causa Prima** (sull'essere) – **cause seconde** (sugli eventi) dell'universo tomista.

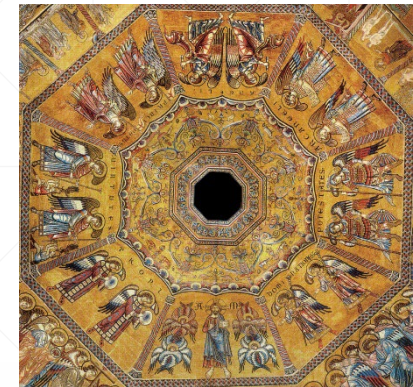
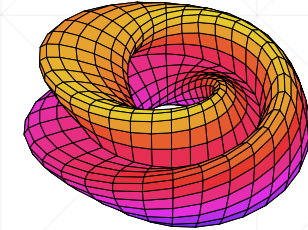


Immagine della volta del Battistero di Firenze (di forma ottagonale) che prende luce dal lucernaio posto al suo centro, con a destra il particolare delle nove gerarchie angeliche coi loro nomi che circondano il punto di luce. Dall'alto in senso orario, Angeli, Arcangeli, Potestà, Dominazioni, Cherubini e Serafini, Troni, Virtù, Principati.

Il viaggio di Dante «dentro» la 3-sfera

- A questo punto possiamo tornare al nostro Canto XXXIV dell'Inferno e al viaggio “dentro” la sfera centrale (la terra) da un suo emisfero all'altro compiuto da Dante con la guida di Virgilio, senza “uscire” mai ovviamente dalla “ipersfera” dell'universo stesso. Un viaggio che, come sappiamo, è caratterizzato dal fatto che i nostri due viaggiatori, arrivati al centro dell'imbuto infernale creato dalla caduta di Lucifero, si rivoltano su se stessi per arrivare “con i piedi sulla terra e la testa in alto” (e non “a testa in giù”), **essendo andati “avanti” nello spazio e “indietro” nel tempo.**
- È stato Florenskij il primo ad accorgersi che questo viaggio è coerente con un'altra costruzione tipica dello spazio ellittico, la cosiddetta “**bottiglia di Klein**” struttura topologica dove **lo spazio è non-orientabile**, non si può cioè distinguere fra “un sopra e un sotto” fra “un esterno e un interno” → una perpendicolare che la attraversasse **si rigirerebbe su se stessa** → **nessità di usare i numeri immaginari $i = \sqrt{-1}$.**
- In essa come sul cosiddetto “nastro di Möbius” – che essendo una struttura bidimensionale può essere facilmente visualizzabile dentro il nostro spazio intuitivo tridimensionale – si può passare dalla “faccia interna” a quella “esterna” **senza “bucare” mai la superficie o “attraversarne il bordo”.**



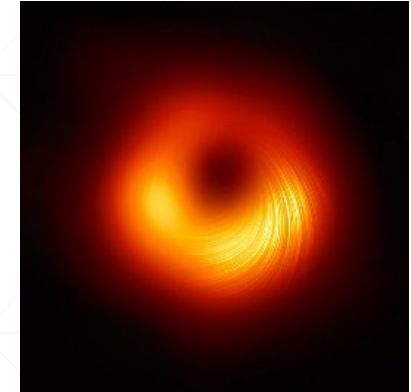
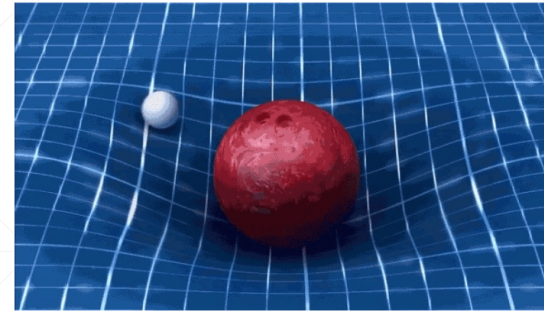
Sinistra. Rappresentazione tridimensionale intuitiva della “bottiglia di Klein” come una bottiglia in cui il collo rientra nel suo fondo così da “rivoltarsi su se stessa” e non avere alcun “esterno” in cui uscire.

Centro. Rappresentazione intuitiva del “nastro di Möbius” come oggetto bidimensionale che si “rivolta su se stesso” così da non avere una faccia “esterna”.

destra. Rappresentazione intuitiva della struttura di una “bottiglia di Klein” ottenuta “riavvolgendo su se stesso” più volte un nastro di Möbius che è la **struttura topologica di un buco nero.**

La struttura topologica del buco nero e il viaggio di Dante e Virgilio

- Ciò che Florenskij non aveva a disposizione né **teoricamente né sperimentalmente** è insomma l'oggetto cosmologico **buco-nero**.
- Una concentrazione molto forte di massa in una regione relativamente piccola dell'universo può far sì che la struttura dello spazio-tempo (= campo gravitazionale) **si richiuda su se stessa come nella "bottiglia di Klein"**, impedendo a qualsiasi forma di materia anche alla luce di sfuggire al suo campo. Un po' come succederebbe se pizzicassimo con forza la superficie di una palla di gomma: si **richiederebbe (una o più volte) in quel punto su se stessa senza mai "bucare" la palla**.
- In tal caso, potremmo passare **da una parte all'altra della superficie della palla** senza mai "bucarla" o senza mai "attraversarne il bordo" proprio come avverrebbe nella "bottiglia di Klein" – o, meglio ancora, **in una topologia a bottiglia di Klein ottenuta riavvolgendo su se stesso più volte un nastro di Möbius** (cfr. la foto del buco nero M87)



- **Sinistra.** Rappresentazione intuitiva del campo gravitazionale terrestre che "cattura" il campo gravitazionale della Luna molto più debole. **Destra.** Foto del buco nero della galassia M87, la più grande fra quelle a noi "vicine" (distante "solo" 56 milioni di anni luce da noi!), un buco nero gigantesco con una massa pari a circa 6,6 miliardi di volte quella del Sole, foto pubblicata nel 2019 e ottenuta dai dati dello "Event Horizon Telescope" che ci fa vedere che fisicamente la sua struttura è come quella matematica di un nastro di Moebius riavvolto più volte su se stesso!

In conclusione...

- Se dunque, seguendo la divulgazione di Rovelli, come abbiamo fatto per il viaggio di Dante e Beatrice sulla “superficie” della tre-sfera quadridimensionale dell’universo dantesco usando la nostra velocissima astronave, **usassimo un’altra astronave per “attraversare” un buco nero** (cosa assolutamente impossibile, fra l’altro,) ci troveremmo **da un’altra parte dell’universo** essendo andati “avanti” nello spazio e “indietro” nel tempo, “un esperimento di pensiero” irrealizzabile, ovviamente, **salvo che per le astronavi di Star Trek!**
- **Eppure, è questo esperimento di pensiero che ha fatto poeticamente Dante:** infatti è esattamente quello che è successo a Dante e Virgilio nel loro viaggio “attraverso il centro della terra”. Essi, essendosi girati su se stessi ma essendo andati comunque avanti nello spazio, si sono trovati “dall’altra faccia” della terra, sempre interna all’universo sferico, non solo con i piedi per terra e il cielo sopra la testa – differentemente da quanto “la gente grossa” si aspetterebbe se descrivessero il loro viaggio come lungo una linea perpendicolare in una sfera descritta su uno spazio euclideo –, ma si sono ritrovati “avanti” nello spazio tridimensionale e “indietro” nel tempo, la quarta di-mensione dello spazio fisico!
- Dante è stato il “Sommo Poeta”, ma perché in lui “somma poesia” è sinonimo di “somma razionalità”: la razionalità di uno che aveva compreso la lezione anti-euclidea dello spazio sferico finito (ellittico) della cosmologia aristotelica.

Hawking, Dante, Tommaso

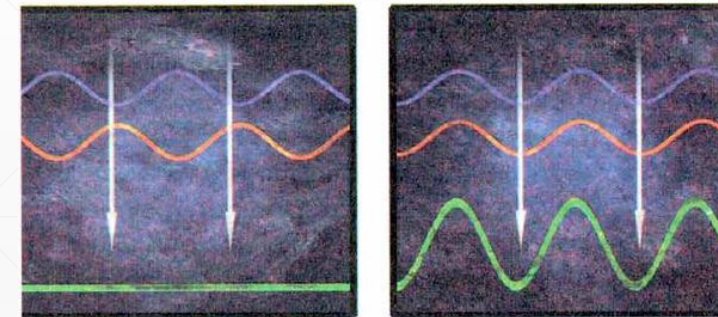
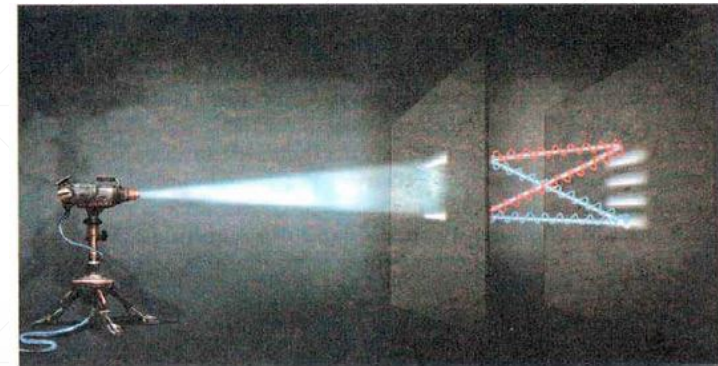
...E la struttura topologica di un universo quanto-relativistico (gravitazione quantistica)

La topologia dello spazio-tempo quantistico è definita sui numeri complessi

- Causa il **principio di indeterminazione** $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ impossibilità in MQ di rappresentare la **dinamica** di una particella come **una traiettoria unidimensionale** che unisce **punti (=stati)** definiti sui numeri reali \mathbb{R} di un grafico che ha per dimensioni o coordinate che commutano reciprocamente la **posizione x e la quantità di moto p** per ciascun istante di tempo (= le **due variabili canoniche x, p non commutano**, perché sono **reciprocamente dipendenti** in MQ).
 - → **Lo stato fisico in MQ (stato quantico)** corrisponde a un **volume** entro cui la particella può stare con la **medesima probabilità**. → La dinamica corrisponde **all'evoluzione di una funzione d'onda probabilistica**, la Ψ di Schrödinger, dove la funzione di probabilità f di ciascuna delle due variabili rispetto all'altra (x_p, p_x), commuta con la **trasformata di Fourier** \hat{f} , definita sui numeri complessi \mathbb{C} , della funzione di probabilità f dell'altra: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$
 - → **Topologia o struttura matematica intrinseca** della materia a **livello quantistico** è definita sui **numeri complessi (p.es., $2i$)**, numeri con una parte **reale** e una **immaginaria**.
-

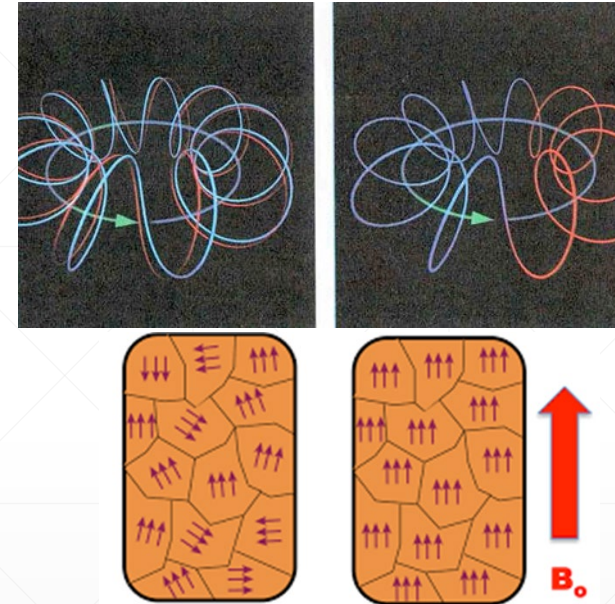
Comportamento ondulatorio delle particelle in MQ e l'esperimento della «doppia fessura»

- La struttura complessa dello spazio-tempo quantistico significa che è necessario un **doppio insieme di coordinate in avanti e indietro rispetto al tempo** delle due variabili canoniche: (x_+, p_+) e (x_-, p_-) .
- La **figura di diffrazione** sullo schermo che manifesta il comportamento ondulatorio della particella nell'esperimento si manifesta quando la particella si muove **in avanti** (nel tempo) attraverso una fessura e **indietro** (nel tempo) attraverso l'altra: $|x_+(t) - x_-(t)| > 0$ (interferenza costruttiva).
- Al contrario, quando $|x_+(t) = x_-(t)|$: non si manifesta alcun fenomeno diffrattivo (interferenza distruttiva) e la particella si comporta classicamente.
- Ciò che è fondamentale è che questo comportamento **è proprio di tutta la struttura della materia** (particelle subatomiche, atomiche, molecole, macromolecole organiche degli acidi nucleici (basi quantistiche della vita)).



Il principio di sovrapposizione e il concetto di coerenza di fase fra campi quantistici in TQC

- L'oggetto fondamentale in fisica quantistica nello studio della **struttura della materia** non è più la **particella materiale** ma il **campo materiale**, ovvero la distribuzione di possibili localizzazioni spazio-temporali della particella che varia nel tempo (oscillazioni della funzione d'onda).
 - → Particella è il **quanto** del relativo campo materiale come il fotone è il quanto del campo elettromagnetico.
 - → Nozione di **vuoto quantistico** come **continuum dinamico** di campi quantistici allo **stato fondamentale (min energia)** che oscillano disordinatamente in tutte le direzioni soddisfacendo una **simmetria sferica**.
- **Principio di sovrapposizione** fra n campi materiali che **oscillano in fase** nel medesimo stato quantico soddisfacendo le leggi della RS: passaggio dalla MQ alla **Teoria Quantistica dei Campi (TQC, Quantum Field Theory, QFT)**.
- → **Rotture spontanee di simmetria (RSS) del vuoto allo stato fondamentale con $T > 0$** (emergenza di coerenze di fase dei campi quantistici senza dispendio di energia) come meccanismo universale con cui la materia costituisce **sistemi sempre più complessi con nuove proprietà e strutture** (particelle elementari, atomi, molecole, strutture molecolari, etc.).

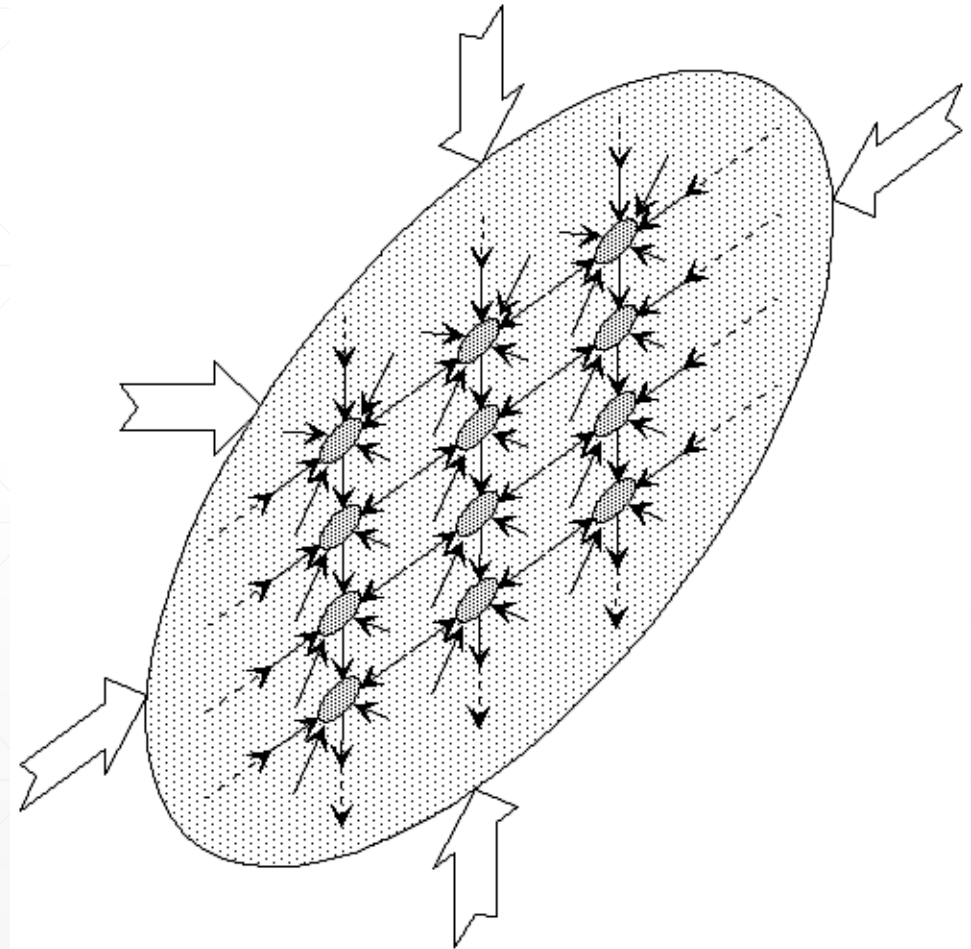


Sopra. Sovrapposizione delle funzioni d'onda di due elettroni che vanno a occupare un unico "orbitale" o "livello energetico" (rappresentato dalla freccia curva) intorno al nucleo di un atomo.

Sotto. Transizione di fase dalla fase antiferromagnetica con spin orientati casualmente in ogni direzione (simmetria sferica) degli atomi di un metallo e fase magnetica (destra) con spin orientati in un'unica direzione (rottura di simmetria).

Vuoto quantistico e creazione dal nulla

- Secondo l'ultimo Hawking e alcuni suoi seguaci la cosmologia attuale renderebbe superflua la nozione di **creazione dal nulla** e la visione tommasiana del Dio Creatore come **Causa Prima dell'universo**.
 - «Poiché l'universo è un sistema chiuso a somma-0 dell'energia, corpi come stelle e buchi neri non possono apparire dal nulla. Ma un intero universo può. Poiché la gravità modella lo spazio-tempo, consente allo spazio-tempo di essere **localmente stabile** ma **globalmente instabile** (...) e quindi non ci sono limiti alla **creazione di interi universi**. La creazione spontanea per fluttuazione del vuoto è la ragione per cui vi è qualcosa invece che nulla, perché l'universo esiste».
- Il problema è che il vuoto quanto-relativista non è il **nulla metafisico**, semmai lo sarebbe il vuoto meccanico newtoniano.
- **Creazione dal nulla** riguarda l'esistenza del vuoto come **sostrato dinamico primario** (*prote dynamis* impropriamente tradotta come «materia prima» dai Latini la definiva Aristotele, *tou wabou* la definisce Gen. 1,2).
- Ovvero, termine primo dell'atto creativo **fuori del tempo** e da cui uno o più universi di enti progressivamente differenziati e **quindi il tempo stesso** emergono per progressive «separazioni» (rottture di simmetrie) per un concorso di cause «seconde» puramente fisiche, direbbe Tommaso. Sebbene come la costruzione delle due sfere che reciprocamente si includono evidenzia, la Causa Prima appare così «trascendente» e insieme «immanente» al mondo stesso.



La gravità quantistica e la 4-sfera di Hawking

- Intuitivamente, una volta ammessa la **quantizzazione anche della forza gravitazionale** il vuoto quantistico include anche il campo gravitazionale e l'energia del vuoto della RG.
- **Principio della rottura di simmetria del vuoto** all'origine della **progressiva separazione** nella storia dell'universo dei campi delle **4 forze fondamentali d'interazione** della natura (gravitazionale, forte, debole, elettromagnetica) e dei relativi **campi materiali** di particelle e dei loro composti che essi pongono in interazione.
- → **Ipotesi di Hawking della 4-sfera** che nasce dalla necessità di integrare nello spazio-tempo della RG definito sui numeri reali della 3-sfera anche il tempo sui numeri immaginari della quantistica → **natura complessa del tempo nel cronotopo quanto-relativista**.
 - In questa ipotesi il big-bang (e l'eventuale big-crunch) con le annesse **fluttuazioni quantistiche** dell'universo di piccolissime dimensioni cessano di essere **singolarità** come lo erano nel cronotopo della RG per diventare **poli opposti** della 4-sfera quanto-relativistica.
 - Siccome la sfera ha infiniti poli opposti, possibilità del **multiverso**, dove l'evoluzione di ciascun universo è definita su una **linea meridiana fra due poli** della 4-sfera con le dimensioni crescenti e decrescenti di ciascun universo definite sul tempo immaginario, mentre il **tempo sempre e solo crescente** definito sui reali è quello che misura «internamente» l'evoluzione di un universo.

