

7044

Max Born, premio Nobel

LA SINTESI EINSTEINIANA

meccanica elettromagnetismo relatività

Max Born, uno dei maggiori fisici viventi, analizza e interpreta in quest'opera la teoria della relatività di Einstein. Il risultato è senza dubbio il più lucido e chiarificatore dei libri scritti per spiegare il passaggio dalla fisica classica a quella relativistica: per la sua completezza e accessibilità finisce con l'essere una vera e propria storia dell'evoluzione della fisica. Inizia infatti dall'esposizione dei concetti e delle operazioni fondamentali, dalle misure di spazio e di tempo, dagli assiomi della geometria euclidea, cioè dall'astronomia tolemaica e copernicana, per arrivare ai concetti di massa, inerzia, forza, quantità di moto, cioè al sistema del mondo newtoniano. Quindi, attraverso l'esposizione della teoria corpuscolare e ondulatoria della luce, la descrizione della misura della sua velocità e l'illustrazione dell'elettrodinamica (teoria elettromagnetica della luce, etere elettromagnetico, massa elettromagnetica, ipotesi di contrazione) e delle geometrie non euclidee, può passare alla teoria della relatività speciale e generale, al continuo spazio-temporale, alle implicazioni cosmologiche, agli scopi della teoria del campo unificato.

B	O	R	N
E	I	N	S
T	E	I	N



universale scientifica Boringhieri

gennaio 2000



Max Born è nato a Breslavia l'11 dicembre 1882. Nel 1915 è professore straordinario di fisica teorica a Berlino, e successivamente professore ordinario della stessa disciplina a Francoforte e poi a Gottinga, ove promuove e dirige i vivi dibattiti da cui prende forma la meccanica quantistica moderna. Nel 1933 si rifugia in Inghilterra, ove tiene alcuni corsi di meccanica applicata presso l'Università di Cambridge. Dal 1936 al 1953 è professore di filosofia naturale presso l'Università di Edimburgo. Premio Nobel per la fisica nel 1954.

Max Born

LA SINTESI EINSTEINIANA

Titolo originale

Einstein's Theory of Relativity (1962)

edizione riveduta e aumentata di Die Relativitätstheorie Einsteins (1920)

Traduzione di Giulio Soliani ed Ernesto Napolitano

1969 Boringhieri

Indice

Prefazione del traduttore, 7

Prefazione dell'autore, 10

Introduzione, 15

1. Geometria e cosmologia, 19

1. Origine dei metodi di misura dello spazio e del tempo 2. Unità di misura di lunghezza e di tempo 3. I sistemi di coordinate 4. Gli assiomi della geometria 5. Il sistema tolemaico 6. Il sistema copernicano 7. Lo sviluppo della teoria di Copernico

2. Le leggi fondamentali della meccanica classica, 29

1. L'equilibrio e il concetto di forza 2. Lo studio del moto; moto rettilineo
3. Il moto nel piano 4. Il moto circolare 5. Il moto nello spazio
6. Dinamica; la legge d'inerzia 7. L'impulso 8. L'effetto di un impulso
9. Massa e quantità di moto 10. Forza e accelerazione 11. Esempio: le vibrazioni elastiche
12. Peso e massa 13. La meccanica analitica
14. La legge dell'energia 15. Le unità dinamiche della forza e della massa

3. L'universo di Newton, 76

1. Spazio assoluto e tempo assoluto 2. La legge di attrazione newtoniana
3. La gravitazione universale 4. La meccanica celeste 5. Il principio di relatività della meccanica classica
6. I limiti del concetto di spazio assoluto 7. Le trasformazioni di Galileo 8. Le forze inerziali 9. Le forze centrifughe e lo spazio assoluto

4. Le leggi fondamentali dell'ottica, 113

1. L'etere 2. La teoria corpuscolare e la teoria ondulatoria 3. La velocità della luce 4. Elementi di teoria ondulatoria, interferenza 5. Polarizzazione e trasversalità delle onde luminose 6. L'etere come solido elastico 7. L'ottica dei corpi in movimento 8. L'effetto Doppler 9. Il trascinamento della luce da parte della materia 10. Aberrazione 11. Riepilogo e ulteriore sviluppo della teoria

5. Le leggi fondamentali dell'elettrodinamica, 181

1. Elettrostatica e magnetostatica 2. La pila di Volta e l'elettrolisi 3. La resistenza e l'effetto termico della corrente 4. Elettromagnetismo 5. Le linee di forza di Faraday 6. La corrente elettrica di spostamento 7. L'induzione magnetica 8. La teoria dell'azione per contatto di Maxwell 9. La teoria elettromagnetica della luce 10. L'etere elettromagnetico 11. La teoria di Hertz sui conduttori in moto 12. La teoria dell'elettrone di Lorentz 13. La massa elettromagnetica 14. L'esperimento di Michelson e Morley 15. L'ipotesi della contrazione

6. Il principio di relatività speciale di Einstein, 270

1. Il concetto di simultaneità 2. La cinematica di Einstein e le trasformazioni di Lorentz 3. La rappresentazione geometrica della meccanica di Einstein 4. Regoli e orologi in movimento 5. Apparenza e realtà 6. Il teorema di addizione per le velocità 7. La dinamica di Einstein 8. L'inerzia dell'energia 9. Energia e quantità di moto 10. L'ottica dei corpi in movimento 11. L'universo assoluto di Minkowski

7. La teoria della relatività generale di Einstein, 363

1. La relatività nel caso di moti arbitrari 2. Il principio di equivalenza 3. Insufficienza della geometria euclidea 4. La geometria delle superfici curve 5. Il continuo bidimensionale 6. Matematica e realtà 7. La metrica del continuo spazio-temporale 8. Le leggi fondamentali della nuova meccanica 9. Deduzioni e conferme nell'ambito della meccanica 10. Previsioni e verifiche sperimentali della meccanica 11. Previsioni e verifiche sperimentali di fenomeni ottici 12. La cosmologia 13. Le teorie unitarie di campo 14. Conclusione

Indice analitico, 437

Altre letture suggerite, 441

Prefazione del traduttore

Nella sua lunga e vasta attività di ricerca, Max Born ha costantemente avuto presente il pericolo che l'estremo sviluppo della fisica in questo secolo finisse per rimanere patrimonio di una ristretta cerchia di studiosi, estraneo non solo ai comuni interessi dell'uomo medio, ma anche alle problematiche culturali del nostro tempo, sulle quali l'influenza del pensiero scientifico è spesso limitata a una informazione vaga e approssimativa. In questo senso va considerata la sua intensa attività didattica, che si è esplicata con la pubblicazione di libri specificatamente dedicati agli studenti di fisica, o di alcune opere divulgative di estrema chiarezza e serietà. Per questa sua caratteristica di mantenere sempre strettamente legati tra loro il momento della ricerca e quello dell'insegnamento e soprattutto per l'estrema varietà dei suoi interessi scientifici, Born appartiene certo a una generazione di scienziati che trova poche corrispondenze con quella attuale.

Questo libro sulla relatività non si limita a una trattazione della teoria di Einstein, ma cerca di percorrere attraverso i principali campi della fisica la lunga evoluzione che, dalle prime intuizioni di Galileo, ha portato alla critica conclusiva di Einstein. Tale criterio, oltre ad affermare chiaramente che, almeno nell'ambito della meccanica, un principio di relatività era già stato introdotto fin dai tempi di Galileo, ha il pregio di mantenere tutte le difficoltà, le contraddizioni, i tentativi attraverso cui si compie lo sviluppo di una determinata corrente di pensiero scientifico. Questo processo che è di solito dimenticato per ragioni di razionalità, per cui l'acquisizione di particolari nozioni è più che altro un seguito di verità ormai consacrate, restituisce alla

scienza la sua caratteristica essenziale, quella cioè di una formazione lunga e difficile di un terreno particolarmente propizio a suscitare e ad accogliere la novità di un'idea sintetica e comprensiva delle precedenti esperienze. In questo modo la critica portata da Einstein alla concezione di un tempo e di uno spazio assoluti (e di conseguenza all'ipotesi di un sistema di riferimento assoluto) assume nel libro la sua giusta prospettiva storica, e il lettore che abbia seguito attentamente la parabola che da Newton e Galileo giunge a Lorentz attraverso uno sviluppo lungo e faticoso, è in grado di valutare pienamente la portata della rivoluzione introdotta dal pensiero di Einstein, e nello stesso tempo di cogliere il valore di preparazione e a volte di anticipazione delle idee che lo hanno preceduto.

La destinazione particolare di questo libro giustifica il metodo adottato di procurarsi di volta in volta il particolare strumento matematico e la specifica nozione di fisica (mantenuti sempre a un livello abbastanza elementare) necessari per una corretta e per quanto possibile esauriente comprensione. La principale esigenza dell'autore è sempre quella di rendere chiari e facilmente intelligibili i concetti che va illustrando, e per questo non soffre di alcuno scrupolo accademico nel presentare le cose su di un piano di estrema schematicità e nell'utilizzare esempi e analogie solo apparentemente banali e insignificanti. Non è raro inoltre il tentativo d'inserire la materia in un più vasto genere di considerazioni, con accenni alla problematica filosofica suscitata dalle scoperte e dal pensiero degli scienziati; si tratta di un'esigenza particolarmente sentita da Born lungo tutto l'arco della sua attività, che lo ha portato a scrivere alcuni saggi su problemi posti al limite fra filosofia e scienza. Quale che sia il giudizio del lettore sulle opinioni espresse da Born, esse assolvono il compito importante di mettere in evidenza le strette connessioni esistenti tra queste due espressioni del pensiero umano: le connessioni tra filosofia e scienza spesso costituiscono una autentica verifica del carattere fondamentale di una teoria fisica.

A nostro parere questo libro, che può essere letto con profitto da chiunque desideri una conoscenza non vaga e superficiale della teoria della relatività, dovrebbe trovare la sua sede più naturale fra gli stu-

denti delle scuole medie superiori. La prima metà, dedicata quasi interamente alla fisica generale e sperimentale, potrebbe coprire con alcune aggiunte il programma di fisica generalmente svolto negli ultimi anni di liceo. Anche la parte dedicata alla teoria dell'etere può essere molto utile, sotto la guida di un insegnante preparato, sia per il suo interesse storico, sia soprattutto come esempio di una metodologia scientifica non sufficientemente critica e nello stesso tempo non suffragata dall'evidenza sperimentale. Il costante riferimento alla nozione stessa di relatività è utile inoltre per evitare il consueto procedimento di riferire un certo numero di formule e di nozioni slegate fra loro, e cogliere il senso profondo dell'evoluzione del pensiero scientifico, che è poi il dato più importante. Certo, se non fosse nota l'arretratezza dei programmi di studio della nostra scuola e la generale refrattarietà a introdurre in essi qualcosa di nuovo, potremmo augurarci che lo studio si estenda, come naturale complemento della prima, anche alla seconda parte, che tratta in particolare la relatività speciale e la relatività generale di Einstein. Non ci sembra infatti che, almeno al livello di formulazione adottato da Born, ciò debba essere considerato superiore alle possibilità di apprendimento di uno studente liceale, mentre è indubbio che una preparazione culturale di base non possa trascurare, sia pure a fini informativi, questa che, insieme alla teoria dei quanti, è certamente una delle massime conquiste del pensiero scientifico del nostro secolo.

E. N.

Prefazione dell'autore

La prima edizione di questo libro fu pubblicata nel 1920, ed esso è l'elaborazione di una serie di lezioni tenute a Francoforte sul Meno allorché si era diffuso un generale interesse per la teoria della relatività e per la personalità di Einstein, in seguito alla prima conferma, da parte di una spedizione inglese incaricata di osservare un'eclissi solare, dell'ipotesi di Einstein sulla deflessione di un raggio luminoso per effetto del campo gravitazionale del sole. Anche se questo interesse era principalmente dettato dall'aspetto sensazionale dell'avvenimento, esisteva in realtà un considerevole e genuino desiderio di comprensione, e il mio proposito fu appunto quello di soddisfare nel miglior modo possibile questo desiderio, cercando di superare l'ostacolo principale rappresentato dal fatto che l'auditorio cui dovevo rivolgermi possedeva scarse nozioni di fisica e di matematica.

Le lezioni furono impostate seguendo in parte un metodo storico e furono completate per mezzo di diagrammi e di semplici esperimenti, che nel testo vennero descritti con l'aiuto di alcune figure. Quanto poi all'uso di formule matematiche, cercai di attenermi all'algebra elementare, senza andare oltre le equazioni lineari e le radici quadrate (evitando anche le equazioni quadratiche e le funzioni trigonometriche) e quindi alla materia contenuta nel programma dei primi anni di una scuola media superiore. Non mi fu possibile rinunciare completamente al concetto di limite, ma cercai di presentarlo in una forma che fosse facilmente comprensibile.

Nel frattempo sono apparsi moltissimi trattati sulla relatività, sia a livello scientifico che a livello divulgativo. Questi ultimi, compresi

alcuni brevi lavori dello stesso Einstein, evitano generalmente qualsiasi formula matematica e si limitano a una esposizione di fatti e di idee in un linguaggio facilmente accessibile oppure in termini filosofici, mezzi con cui non credo si possa raggiungere una conoscenza sufficientemente approfondita della relatività. Ma al giorno d'oggi la scienza, e la fisica in particolare, sono diventate parte fondamentale della nostra civiltà, ed è notevolmente aumentato il numero di persone desiderose di afferrarne il significato. In questo senso, rileggendo il mio vecchio libro, ho avuto l'impressione che il suo particolare modo di espressione potesse incontrare il consenso di un numero considerevole di persone, e in particolare di tutti coloro che, privi di una profonda conoscenza della matematica e della fisica moderna e forti soltanto di qualche reminiscenza scolastica, sentissero il desiderio di approfondire certe conoscenze. Io mi auguro che possano ricevere da questo libro qualcosa di più di una vaga impressione sui grandi, ma oscuri e difficili, misteri della natura, e che raggiungano una reale comprensione del moderno pensiero scientifico.

Per queste ragioni, e con la condizione che fosse stato possibile trovare un aiuto in un giovane collaboratore, mi decisi alla fine a pubblicare un'edizione completamente rinnovata e aggiornata. Il professor Günther Leibfried accettò la mia proposta di collaborazione e in considerazione della gran mole di lavoro necessaria per un'esauriente ricerca bibliografica, per la preparazione di nuovi paragrafi e una generale revisione del testo, trovò un ulteriore aiuto nel dottor Walter Biem. L'edizione utilizzata come base del nostro lavoro è stata la versione inglese del 1924, con un completo rinnovamento di molti paragrafi e l'aggiunta di altri. Le variazioni più importanti si riferiscono ai capitoli 6 (relatività speciale) e 7 (relatività generale). Per esempio, la relazione fra massa ed energia e la formula che lega la velocità a queste due grandezze è stata più efficacemente ricavata in base alle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso relative al caso di una collisione anelastica. Vi è inoltre un considerevole aggiornamento delle verifiche sperimentali della relatività generale, e un cenno sulle prospettive di sviluppo futuro della teoria. Il capitolo "Macrocosmo e

microcosmo" della vecchia edizione, è stato sostituito da un paragrafo sulla cosmologia, in cui ho cercato di dare un breve sommario dello stato attuale di questa scienza.

Per ciò che riguarda il problema tanto dibattuto delle unità di misura, abbiamo continuato a usare le classiche unità di Gauss. Sono tuttora convinto infatti che esse siano da preferire da un punto di vista logico ed epistemologico (anche se non dal punto di vista della fisica applicata o dell'ingegneria), e quindi più adatte a scopo didattico.

M. B.

Bad Pyrmont, 1962

La sintesi einsteiniana

Introduzione

Anche se la scienza si evolve secondo un processo continuo e regolare, non è impossibile individuare dei periodi storici ben precisi, caratterizzati da rilevanti scoperte sperimentali e da nuove idee teoriche. Una di queste svolte decisive si ebbe nel 1600 circa ed è legata al nome di Galileo che, mediante le sue ricerche sulla meccanica, pose le fondamenta del metodo empirico e diede una prova convincente del sistema copernicano dell'universo, enunciato cinquant'anni prima. Ciò segnò la fine della filosofia scolastica della natura basata sull'insegnamento di Aristotele e l'inizio della scienza moderna.

Un'altra svolta si ebbe nel 1900 circa, sia per il gran numero di nuove scoperte sperimentali (raggi X, radioattività, l'elettrone ecc.) sia per lo sviluppo di due teorie fondamentali, la teoria dei quanti e la relatività. La teoria dei quanti risale al 1900, quando Max Planck espresse il suo concetto rivoluzionario di atomi di energia o "quanti"; questo avvenimento fu così decisivo per lo sviluppo della scienza che è di solito considerato l'elemento di passaggio tra la *fisica classica* e la *fisica moderna* o *quantistica*.

Per quanto riguarda la relatività, invece, non è altrettanto facile riferirsi a un solo nome o a una singola data: verso il 1900 parecchi grandi matematici e fisici, Larmor, Fitzgerald, Lorentz, Poincaré, per ricordarne solo alcuni, avevano intuito molti dei suoi contenuti principali. Nel 1905 Albert Einstein fondò la teoria su principi molto generali di carattere filosofico, e pochi anni dopo Hermann Minkowski ne diede un'espressione conclusiva dal punto di vista logico

e matematico. La ragione per cui di solito soltanto il nome di Einstein è legato alla relatività è che il suo lavoro del 1905 non rappresentò che il punto di partenza per l'ancor più fondamentale "relatività generale", nella quale egli enunciava una nuova teoria della gravitazione e apriva nuove prospettive alla comprensione della struttura dell'universo.

La teoria della relatività speciale del 1905 può a ugual diritto essere considerata la fine del periodo classico o l'inizio di una nuova era. Essa infatti, se utilizza le idee classiche sulla distribuzione continua della materia nello spazio e nel tempo e sull'aspetto causale, o meglio deterministico, delle leggi naturali, nello stesso tempo introduce una concezione completamente nuova dello spazio e del tempo, criticando risolutamente i concetti tradizionali formulati da Newton. In questa nuova prospettiva nel considerare i fenomeni naturali è l'apporto più significativo di Einstein, ciò che distingue la sua opera da quella dei suoi predecessori e la scienza moderna dalla scienza classica.

Ancor prima di Einstein, l'indagine della realtà fisica aveva portato a oltrepassare i limiti del dominio dei sensi umani. Gli scienziati conoscevano la luce invisibile (ultravioletto, infrarosso), il suono non udibile, operavano con campi elettromagnetici, impercettibili ai sensi e osservabili solo indirettamente attraverso le loro azioni sulla materia. Questa ricerca di una maggior astrazione si rese necessaria nel momento in cui si riconobbe il potere limitato delle impressioni sensoriali; per fare un esempio, non era possibile costruire una teoria del calore sulla semplice sensazione di caldo o freddo. L'impressione sensoriale fu quindi sostituita da uno strumento particolare, il termometro, in cui un salto termico era misurato dalla lunghezza di una colonna di mercurio. Vi sono, d'altra parte, numerose circostanze in cui uno dei nostri sensi è sostituito, o almeno controllato, da un altro. In realtà processi di questo tipo sono molto comuni nella prassi scientifica, perché conducono alla percezione di strutture puramente geometriche, quali risultano alla vista e al tatto, che sono generalmente le più attendibili. Si tende in questo modo

a rendere *oggettivo* qualsiasi tipo di osservazione e ad eseguire delle misure per quanto possibile indipendenti dal singolo sperimentatore. In questo senso è possibile, per esempio, parlare di un campo elettromagnetico; non perché esso sia direttamente accessibile ad alcun nostro senso, ma perché siamo in grado d'eseguire delle osservazioni su certe grandezze meccaniche che risentono delle sue azioni.

Un'altra caratteristica generale del pensiero scientifico è nell'evidenza data all'aspetto *relativo* dei fenomeni. Un esempio famoso in tal senso è connesso con la scoperta della forma sferica della terra: finché la terra era considerata un disco appiattito, la direzione verticale in un punto era in un certo senso assoluta. Ora, essa diventava la direzione verso il centro del globo ed era quindi definita solo rispetto alla posizione dell'osservatore. Problemi estremamente generali come il carattere assoluto di una direzione o di un punto nello spazio o di un istante nel tempo, trovarono una prima risposta nell'ambito scientifico nei famosi assiomi di Newton. Il loro enunciato non lascia alcun dubbio che tale risposta dovesse essere positiva. Ma le sue equazioni del moto non sono del tutto compatibili con questa posizione: esse dimostrano che sistemi di riferimento in moto relativo, possono ciascuno a ugual diritto essere considerati a riposo. Lo spazio di Newton è assoluto solo in un senso limitato; d'altra parte, nuove e più severe difficoltà dovevano sorgere in seguito, alla luce di ulteriori ricerche, specialmente in elettromagnetismo e in ottica.

Einstein superò questa difficoltà partendo da una completa revisione dei vecchi concetti di spazio e di tempo, che giudicava assolutamente inadeguati. Ai principi già accettati sul carattere oggettivo e relativo della realtà, egli ne aggiunse un altro, di cui per primo seppe cogliere l'estrema portata logico-critica nell'ambito della ricerca scientifica. Questo principio, già noto per esempio al fisico e filosofo Ernst Mach che esercitò una grande influenza sul pensiero di Einstein, afferma che nessun concetto e nessuna affermazione che non siano suscettibili di verifica sperimentale devono trovar posto in una teoria fisica. In questo senso egli affermò che il concetto di

simultaneità di due eventi in punti diversi dello spazio, non è una nozione verificabile. Questa idea lo portò a formulare, nel 1905, nuove proprietà peculiari dello spazio e del tempo. Circa dieci anni dopo, introducendo lo stesso principio nello studio del moto dei corpi soggetti a un campo gravitazionale, fu portato a enunciare la sua teoria della relatività generale.

Questo principio per cui tutte le grandezze non osservabili sono eliminate dalla fisica, fu oggetto di varie dispute filosofiche; si disse che apparteneva all'ambito della filosofia positivista, di cui Mach era convinto assertore. Ma il positivismo definendo pura costruzione mentale tutto ciò che non è oggetto di immediata percezione sensoriale, cui soltanto riconosce un carattere di realtà, porta a un fondamentale scetticismo nei confronti dell'esistenza di una realtà esterna a noi. Niente fu più lontano dalle convinzioni di Einstein, che negli ultimi anni dichiarò esplicitamente la sua opposizione a questa filosofia.

Si potrebbe pensare che questo metodo, così fecondo di risultati nell'opera di Einstein, non sia che un criterio euristico per cercare di salvare quelle parti della teoria classica che si erano rivelate meno in accordo con la realtà empirica. In realtà esso è diventato di fondamentale importanza in fisica per lo sviluppo della ricerca, specie nell'ambito della teoria dei quanti; in questo senso veramente l'opera di Einstein si colloca al culmine della teoria classica e all'inizio di un nuovo periodo della fisica.

1.

Geometria e cosmologia

1. Origine dei metodi di misura dello spazio e del tempo

Il problema di misurare lo spazio e il tempo si risolve in fisica fissando numericamente un punto e un istante in corrispondenza di un dato evento fisico, che viene così isolato dall'insieme di eventi che coesistono e si succedono nel tempo.

Il primo problema che l'uomo dovette risolvere fu quello di orientarsi sulla terra: si sviluppò così la scienza che studia la misurazione del globo terrestre. Di qui prese l'avvio la "geometria" (dal greco $\gamma\eta$ = terra), che è lo studio delle proprietà spaziali dei corpi. Fin dai primordi la misura del tempo fu suggerita dall'avvicinarsi della notte e del giorno, dalle fasi lunari e dalle stagioni. L'estremo interesse esercitato da questi fenomeni portò l'uomo a volgere la propria attenzione verso le stelle, dando così origine alla scienza dell'universo: la cosmologia. Le tecniche dell'astronomia, che utilizzarono nello studio delle regioni celesti quegli insegnamenti della geometria che avevano già mostrato la loro efficacia nello studio della terra, consentirono di stabilire le distanze e le orbite dei corpi celesti e permisero agli uomini di misurare il tempo con mezzi astronomici, in modo da distinguere fra passato, presente e futuro, e assegnare a ciascun evento il suo posto nel tempo.

2. Unità di misura di lunghezza e di tempo

Alla base di ogni misura di spazio e di tempo è il problema di fissare le unità. La frase "una lunghezza di x metri" sta a indicare

il rapporto della lunghezza da misurare con la lunghezza di un metro; la frase "un tempo di x secondi", il rapporto fra il tempo da misurare e la durata di un secondo. Abbiamo a che fare quindi in ogni caso con rapporti rispetto a una unità campione, per altro completamente arbitraria, scelta in modo tale da essere facilmente riproducibile, trasportabile e di lunga durata.

In fisica l'unità di lunghezza è il *centimetro* (cm), la centesima parte del metro campione conservato a Parigi. Si riteneva fino a qualche tempo fa che fra la circonferenza della terra e il metro esistesse il semplice rapporto di 1:40 000 000, ma misure più recenti hanno mostrato che si tratta di una valutazione non molto precisa.

L'unità di tempo è il *secondo* (s) che rappresenta una ben nota frazione del periodo di rotazione della terra attorno al suo asse.

Queste definizioni delle unità riferite alla circonferenza e al periodo di rotazione della terra non si sono rivelate troppo convenienti. Oggi preferiamo usare delle unità di misura basate sulle proprietà atomiche della materia, perché più facilmente riproducibili. Il metro è quindi definito come un multiplo di lunghezza d'onda di una ben precisa radiazione emessa da un atomo di cadmio; il secondo come un multiplo del periodo d'oscillazione di certe molecole.

3. I sistemi di coordinate

Se non ci limitiamo a determinare lunghezze e intervalli di tempo ma vogliamo fissare posizioni nello spazio e istanti di tempo, dobbiamo fare delle ulteriori convenzioni. Nel caso del tempo, che individua un'unica dimensione, è sufficiente specificare un'origine (o punto zero); gli storici, ad esempio, fissano le date contando gli anni a partire dalla nascita di Cristo, mentre gli astronomi si servono di origini differenti a seconda dell'oggetto delle loro ricerche. Una volta fissate l'unità di misura e l'origine, ogni evento è rappresentato da un numero ben preciso.

In geometria (supponiamo ad esempio di voler individuare un punto sulla terra) fissare un punto significa assegnare due numeri. Si è immaginato quindi di tracciare sulla superficie della terra un reticolo di linee curve intersecantisi fra loro, la cui posizione è individuata da un numero, una distanza, o un angolo, tutti riferiti a una linea fissa scelta come origine.

I geografi assegnano generalmente la longitudine (est o ovest di Greenwich) e la latitudine (nord o sud dell'equatore) (fig. 1).

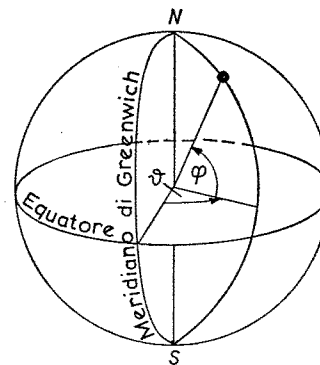


Fig. 1. Longitudine θ e latitudine φ di un punto sulla superficie della terra; θ è misurata a partire dal meridiano di Greenwich, φ dall'equatore. N ed S sono i poli Nord e Sud.

Queste determinazioni fissano anche le linee zero, da cui si originano le coordinate: per la longitudine geografica il meridiano di Greenwich e per la latitudine l'equatore. Nello studio della geometria piana si usano generalmente due *coordinate rettangolari* (*cartesiane*) x e y , che rappresentano le distanze di un punto da due *assi coordinati* perpendicolari fra loro (fig. 2a). In casi particolari si usano anche *coordinate oblique* (fig. 2b) oppure *coordinate polari* (fig. 3). In ogni caso, fissato un sistema di coordinate, la posizione di ciascun punto è specificata da due numeri.

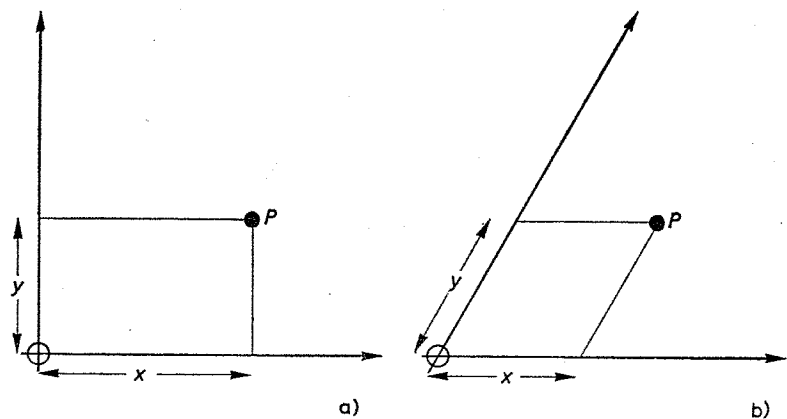


Fig. 2. La posizione nel piano di un punto P è caratterizzata dalle proiezioni sugli assi x e y in un sistema di coordinate rettangolari (2a) e in un sistema di coordinate oblique (2b).

Analogamente per fissare un punto nello spazio abbiamo bisogno di tre coordinate; la scelta più semplice è ancora un sistema di coordinate perpendicolari rettilinee x , y , z (fig. 4).

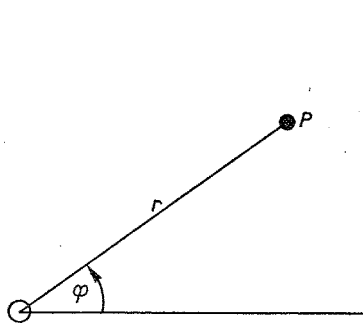


Fig. 3. In un sistema di coordinate polari un punto è individuato dalla distanza r fra l'origine O e il punto P e dall'angolo φ che r forma con un asse passante per l'origine.

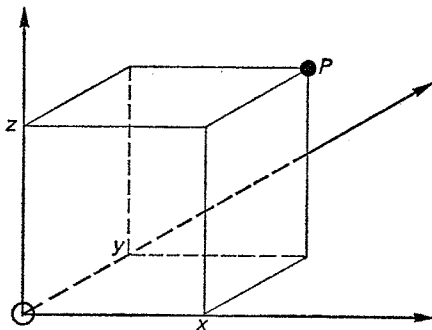


Fig. 4. Un punto P nello spazio è individuato dalle tre proiezioni x , y , z sugli assi coordinati.

4. Gli assiomi della geometria

I più antichi studiosi di geometria trascurarono il problema di caratterizzare le posizioni di un punto sulla superficie terrestre, e si dedicarono con maggior interesse allo studio della forma e della misura di aree e volumi e delle proprietà delle figure geometriche. La geometria ebbe origine dalla topografia e dall'architettura e si sviluppò quindi senza introdurre il concetto di coordinate. Il suo primo compito fu di formulare dei teoremi che illustrassero le proprietà di enti geometrici come i punti, le rette e i piani. Nell'opera fondamentale della geometria greca, quella di Euclide (300 a. C.), questi enti non sono ancora esattamente definiti, ma soltanto nominati o descritti; è frequente quindi il ricorso alla intuizione. È chiaro d'altra parte che bisogna possedere almeno il concetto di linea retta per intraprendere lo studio della geometria: lo spigolo di una casa, una corda tesa, possono fornirci il concetto di retta, astruendo dalla sostanza materiale di cui sono formati. In un secondo tempo saremo in grado di stabilire le leggi che valgono per le differenti configurazioni di tali enti astratti. Il grande merito dei greci fu appunto l'aver scoperto che sono sufficienti poche leggi di questo tipo, per ottenere come logica conseguenza tutte le altre. Tali leggi, che sono alla base della teoria, si chiamano *assiomi*. Essi non possono essere dimostrati, poiché non si sviluppano mediante un procedimento logico, ma attraverso differenti processi conoscitivi, che nei secoli passati sono stati oggetto di approfondite speculazioni filosofiche. Fino alla fine del diciottesimo secolo, la geometria accettò come veri questi assiomi, e costruì su di essi, con un procedimento puramente deduttivo, tutta una serie di teoremi.

Discuteremo in seguito il problema del significato di questi enti geometrici elementari che chiamiamo punto, retta, piano, e dei processi conoscitivi che sono alla base degli assiomi della geometria. Per ora, tuttavia, supporremo sufficientemente chiare queste cose e ci serviremo dei concetti geometrici come si imparano normal-

mente nelle scuole. La plausibilità di numerosi teoremi geometrici e l'utilità dell'intero sistema nel descrivere il mondo in cui viviamo ci sembrano, almeno per ora, una sufficiente giustificazione per usarli.

5. Il sistema tolemaico

Il cielo appare ai nostri occhi come una volta più o meno curva, cui sono sospese le stelle, che nel giro di un giorno ruota attorno a un asse la cui direzione è prossima a quella della stella polare. Fino a quando si pensò che la realtà coincidesse con ciò che appare ai nostri occhi, si ritenne superflua qualsiasi applicazione della geometria all'astronomia e difatti non ve ne fu alcuna. Nessuna lunghezza e distanza astronomica poteva essere misurata con unità terrestri, e per determinare la posizione di una stella era sufficiente assegnare i due angoli che la congiungente osservatore e stella forma con il piano dell'orizzonte e con un altro piano scelto appropriatamente. A questo stadio della conoscenza si pensava che la terra fosse ferma e costituisse la base di tutto l'universo. Le parole "sopra" e "sotto" avevano un significato assoluto e, lasciato alla fantasia dei poeti e alle concezioni dei filosofi ogni tentativo di apprezzare l'altezza dei cieli e la profondità degli abissi, non si poneva il problema di specificare il significato di queste parole. Era naturale quindi che un gran numero di dati soggettivi influenzasse ancora qualsiasi concetto scientifico. Il sistema che prese il nome da Tolomeo (150 d. C.) è appunto la formulazione scientifica di questo atteggiamento mentale. In esso erano già presenti molte nozioni concernenti il moto del sole, della luna e dei pianeti, come pure i metodi per calcolarli teoricamente; ma si accettava ancora l'idea che la terra fosse ferma e le stelle si muovessero attorno ad essa a distanze non misurabili. Non era ancora concepibile che si potessero applicare allo studio dello spazio astronomico i metodi della geometria, perché si immaginava che le orbite dei pianeti, che secondo le leggi

della geometria terrestre dovevano essere cerchi ed epicicli, fossero fissate come anelli a sfere di cristallo e queste, disposte a strati concentrici fra loro, costituissero la volta celeste.

6. Il sistema copernicano

Com'è noto i pensatori greci avevano già scoperto la forma sferica della terra e avevano compiuto il primo passo oltre il sistema geocentrico (Aristarco, terzo secolo a. C.). Ma solo molto tempo dopo la scomparsa della cultura e della civiltà greca, altre popolazioni di differenti civiltà accettarono come realtà fisica l'idea che la terra fosse sferica. Ciò rappresentò per la prima volta la tendenza a superare l'impressione soggettiva dei nostri occhi e nello stesso tempo il primo vero grande passo verso l'idea di relatività. A molti secoli di distanza da questa svolta, ciò che a quel tempo rappresentò una scoperta senza precedenti è diventata oggi una nozione comune anche per uno scolaro. Per questo è difficile farsi un'idea precisa di cosa dovesse rappresentare per gli uomini di quel tempo rinunciare al significato assoluto delle parole "sopra" e "sotto" a accettare che chi abita ai nostri antipodi chiami "sopra" ciò che per noi è "sotto". L'avvenuta circumnavigazione della terra fu l'avvenimento che mise a tacere tutti i dissidenti, e la verifica della forma sferica della terra privò di molti argomenti la contesa fra punto di vista soggettivo e oggettivo, fra la ricerca scientifica e la Chiesa. Tale contesa esplose solo dopo che Copernico (1543) tolse la terra dalla sua posizione di centro dell'universo e creò il *sistema eliocentrico*.

L'importanza di questa scoperta per lo sviluppo del pensiero umano fu che in tal modo la terra, il genere umano, l'io individuale, persero la loro posizione di centro di tutte le cose. La terra diventò un satellite del sole, attorno al quale ruotano altri pianeti d'eguale importanza, e l'uomo non fu più così importante nell'universo. Nessuno di questi fatti trasse origine dall'esperienza comune (come ad esempio la circumnavigazione del globo), ma da un certo nu-

mero di osservazioni difficili e sottili per quei tempi e da calcoli accurati delle orbite planetarie. Si trattava in ogni caso di affermazioni inaccessibili alla maggioranza e di poca importanza per la vita di tutti i giorni: l'evidenza, l'intuizione, la tradizione sacra e profana, erano tutte contro la nuova dottrina. Il sole non era più il disco che appare ai nostri occhi, ma una sfera di fuoco di enorme dimensione; la familiare luce del cielo era anch'essa dovuta alla presenza di altre simili sfere di fuoco, poste a incredibili distanze, o di corpi simili alla terra che riflettevano la luce da altre sorgenti. Si cominciava a ritenere che molte impressioni sensoriali fossero errate e che la realtà fisica fosse rappresentata da enormi distanze e incredibili velocità. Ciò nonostante questa dottrina era destinata ad affermarsi, poiché essa traeva la sua forza dal vivo desiderio di ogni individuo di comprendere la realtà fisica della materia (anche se tutto ciò non era mai stato molto importante nella vita dell'uomo) mediante concetti semplici e chiari, anche se astratti. In questo processo, che è alla base della ricerca scientifica, lo spirito umano non esitò a mettere in dubbio e a considerare illusorio anche ciò che i suoi sensi gli facevano ritenere evidente, e preferì far ricorso a un'assoluta astrazione, piuttosto che escludere da una descrizione scientifica della natura qualsiasi realtà dimostrata, anche se apparentemente insignificante.

La grande conquista di Copernico fu alla base di altri simili, ma meno incisivi, tentativi d'introdurre il concetto di "relativo" nello sviluppo delle scienze naturali, finché le scoperte di Einstein non si affiancarono a quelle del suo grande predecessore.

Vogliamo ora riferire in poche parole la descrizione del mondo fatta da Copernico. Come abbiamo visto poco fa, essa accolse nello studio dello spazio astronomico i concetti e le leggi della geometria sostituendo ai cicli del sistema tolemaico, che si supponevano incastonati sulle superfici delle sfere di cristallo, orbite reali, i cui piani potevano assumere differenti posizioni nello spazio. Al centro di questo sistema è il sole, attorno al quale i pianeti descrivono orbite circolari; uno di essi è la terra che ruota attorno al suo asse, e la

luna nel suo moto di rotazione descrive un'orbita di rivoluzione attorno ad essa. Le stelle, immobili nello spazio, non sono che corpi simili al sole, ma enormemente più distanti. La descrizione data da Copernico aveva il grande pregio di spiegare in modo semplice quei fenomeni che le antiche teorie giustificavano solo con ipotesi complicate e artificiose, cosicché si resero immediatamente chiari, comprensibili e facili da calcolare l'alternarsi del giorno e della notte, le stagioni, le fasi lunari e le orbite dei pianeti.

7. Lo sviluppo della teoria di Copernico

Ben presto però la teoria delle orbite circolari di Copernico si mostrò insufficiente a spiegare tutte le osservazioni sperimentali; si vide infatti che le orbite realmente descritte dai pianeti erano più complicate del previsto. Teniamo presente che il punto critico per le nuove idee sull'universo era nella scelta tra accettare come necessarie alcune ipotesi artificiali, come gli epicicli del sistema tolemaico, oppure sviluppare i calcoli delle orbite planetarie senza introdurre ulteriori complicazioni. Fu merito immortale di Kepler (1618) l'aver scoperto che i moti dei pianeti sono governati da leggi straordinariamente semplici e avere così salvato da una situazione critica il sistema copernicano. Egli affermò che le orbite dei pianeti attorno al sole non sono cerchi, ma curve simili ad essi, chiamate ellissi, di cui il sole occupa uno dei due fuochi. Con la stessa estrema semplicità con cui questa legge descrive la forma delle orbite, così le altre due leggi di Kepler determinano le velocità orbitali dei pianeti e la relazione esistente fra periodi di rivoluzione e dimensioni delle ellissi.

Nello stesso tempo Galileo (1610), utilizzando per le sue osservazioni il telescopio che era stato appena inventato, scoprì i satelliti di Giove; questa scoperta fu una conferma in scala ridotta del modello del sistema planetario e dimostrò con l'osservazione diretta la verità delle idee di Copernico. Ma la conquista più grande di Galileo fu l'aver sviluppato i principi della meccanica, che furono

applicati da Newton (1687) allo studio delle orbite planetarie, completando in tal modo le teorie di Copernico.

I cerchi di Copernico e le ellissi di Kepler sono oggetto di ciò che la scienza moderna chiama descrizione *cinematica* delle orbite, cioè una trattazione matematica del moto che non si occupa delle condizioni e delle cause che lo generano. L'espressione causale delle leggi del moto è invece argomento della *dinamica*, che fu fondata da Galileo. Newton si servì di questa teoria nello studio del moto dei corpi celesti e, con un'interpretazione geniale delle leggi di Kepler, introdusse in astronomia il concetto di *forza meccanica*. La sua legge di gravitazione si dimostrò superiore a tutte le precedenti teorie poiché riusciva a prevedere tutte le deviazioni dalle leggi di Kepler, le cosiddette perturbazioni delle orbite, scoperte grazie ai successivi perfezionamenti dei metodi d'osservazione.

Questo punto di vista dinamico nel trattare i fenomeni del moto nello spazio astronomico richiese tuttavia una formulazione più precisa dei concetti di *spazio* e di *tempo*. Essi ricevettero per la prima volta nell'opera di Newton un'esplicita definizione assiomatica, per cui è giustificato ritenere che la teoria accettata fino all'avvento della relatività einsteiniana sia un'espressione della dottrina newtoniana dello spazio-tempo. Per comprendere queste idee è essenziale una chiara nozione delle leggi fondamentali della meccanica, che ponga in primo piano le questioni più direttamente connesse al concetto di relatività. Dal momento che questo punto di vista è trascurato di solito nei testi elementari di fisica, riteniamo opportuno discutere immediatamente i concetti più semplici, le definizioni e le leggi della meccanica.

2.

Le leggi fondamentali della meccanica classica

1. *L'equilibrio e il concetto di forza*

Storicamente lo studio della meccanica prese l'avvio dalla *scienza dell'equilibrio* o *statica*; d'altra parte, anche da un punto di vista logico, uno sviluppo che parta da questo punto è il più naturale.

Il concetto fondamentale della statica è la *forza*. Esso deriva dall'impressione soggettiva di sforzo che proviamo ogni volta che compiamo un lavoro; noi diciamo, ad esempio, che fra due uomini è più forte quello che è in grado di sollevare la pietra più pesante o di tendere l'arco più rigido. Questa misura della forza, di cui si servì Ulisse per affermare i suoi diritti sui Proci e che ha una parte importante nelle storie degli eroi del passato, già contiene *in nuce* la oggettivazione della sensazione soggettiva di sforzo. Lo stadio successivo fu la scelta di un'unità per la forza e la misura di tutte le forze mediante i loro rapporti con questa unità, vale a dire la *relativizzazione* del concetto di forza. Il peso, che è manifestazione più evidente della forza in quanto fa sì che ogni grave sia attratto verso il basso, fornì l'unità di forza più conveniente: un blocco di metallo scelto come unità di peso con un decreto dello Stato o della Chiesa. Ai giorni nostri, le unità di misura sono fissate da un congresso internazionale che ha scelto come unità di peso quello di un blocco di platino conservato a Parigi. Nel seguito, a meno di stabilire il contrario, useremo come unità il *grammo-peso*. La *bilancia* è lo strumento usato per confrontare il peso di corpi differenti. Due corpi hanno lo stesso peso quando, posti sopra i due piatti della bilancia, non ne turbano l'equilibrio; se poniamo questi due corpi

su un piatto e nell'altro un peso tale che vi sia ancora equilibrio, questo nuovo corpo ha un peso doppio di ciascuno degli altri due. Ripetendo questo procedimento a partire dall'unità di peso, avremo a disposizione un insieme di pesi mediante i quali determinare convenientemente il peso di ogni corpo.

Non è nostro compito mostrare in che modo questi mezzi abbiano reso possibile la scoperta e l'interpretazione delle semplici leggi della statica dei corpi rigidi, come ad esempio le leggi della leva; ci limitiamo qui a introdurre quei concetti che sono indispensabili per comprendere la teoria della relatività.

Oltre alle forze che l'uomo sperimenta col proprio corpo o con i corpi dei suoi animali domestici, egli s'imbatte in altre, principalmente in fenomeni che oggi definiamo di tipo *elastico*. Appartengono a questa categoria le forze necessarie a tendere un arco o una balestra. Ebbene, queste forze possono essere facilmente confrontate con dei pesi. Se, ad esempio, vogliamo misurare la forza necessaria ad allungare di una certa estensione una molla (fig. 5), possiamo trovare per tentativi che peso sia necessario applicare in modo che vi sia equilibrio proprio per questa estensione. La forza elastica è quindi uguale a quella del peso, con la sola differenza che la prima

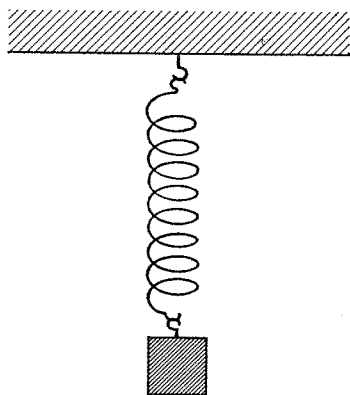


Fig. 5. Confronto fra una forza elastica e un peso.

si esercita verso l'alto, l'altra verso il basso. Abbiamo applicato in questo caso il principio che in condizioni d'equilibrio tutte le forze si elidono; si tratta del newtoniano *principio di eguaglianza fra azione e reazione*.

Se turbiamo questa configurazione d'equilibrio diminuendo di intensità o eliminando una delle forze, si ha il *moto*. Un grave cade se la mano che lo sostiene, che cioè gli fornisce la forza di reazione, lo lascia andare; una freccia viene scagliata in avanti quando l'arciere abbandona la corda tesa dell'arco; la molla della figura 5 ritorna in posizione normale se togliamo il peso. La forza tende a produrre il movimento. È questo il punto di partenza della *dinamica*, che si occupa di scoprire le leggi di questo processo.

2. Lo studio del moto; moto rettilineo

Cominciamo con l'analizzare il concetto di moto. L'esatta descrizione matematica del moto di un punto consiste nello specificare, ad ogni istante, la posizione che il punto assume rispetto a un sistema di coordinate precedentemente fissato. Per far ciò un matematico si servirebbe di formule; noi, nei limiti del possibile, cercheremo di evitare questo metodo (non familiare a tutti) per rappresentare leggi e relazioni, e ricorreremo invece a un metodo di rappresentazione grafica.

Illustriamo ora il caso più semplice, il moto di un punto su una linea retta. Adottiamo il centimetro come unità di lunghezza, come è usuale in fisica, e supponiamo che il punto mobile, all'istante in cui inizia il nostro studio ($t=0$), si trovi alla distanza $x=1$ cm dal punto zero, o origine. Supponiamo inoltre che in 1 s il punto abbia percorso una distanza di $\frac{1}{2}$ cm verso destra, cosicché per $t=1$ s la distanza dall'origine diventa 1,5 cm. Nel secondo successivo il punto si sposti dello stesso tratto, fino a $x=2$ cm, e così via. Nella tabella seguente riportiamo le distanze x corrispondenti ai tempi t :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8 s
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5 cm

La stessa relazione fra x e t è illustrata nella figura 6, in cui il punto mobile è indicato da un punto sulla scala delle distanze. Ora, invece di disegnare un insieme di diagrammi parziali successivi, possiamo disegnare un'unica figura in cui le x e le t abbiano il ruolo di *coordinate* (fig. 7). In questo modo si ha il vantaggio di descrivere

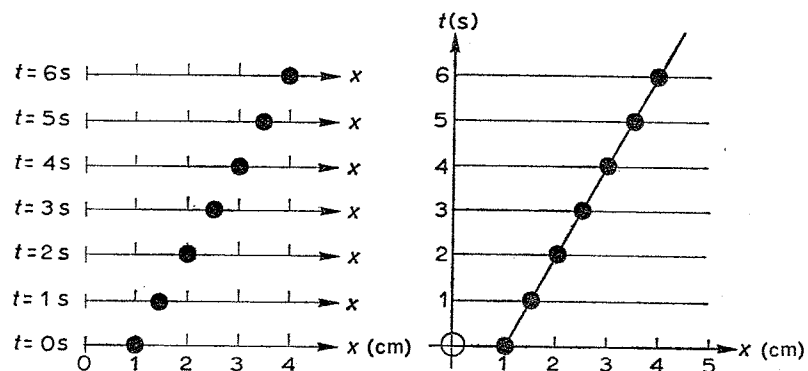


Fig. 6. Moto di un punto sull'asse x con velocità costante $v = \frac{1}{2}$ cm/s.

Fig. 7. Rappresentazione del moto di un punto (fig. 6) in un sistema di coordinate xt .

la posizione del punto non soltanto all'inizio d'ogni secondo, ma anche a tutti i tempi intermedi. A tale scopo dobbiamo semplicemente connettere le posizioni segnate nella figura 6 mediante una curva continua, che nel nostro caso è ovviamente una retta, in quanto il punto descrive spazi uguali in tempi uguali. Le coordinate x e t si mantengono perciò proporzionali fra di loro, e la rappresentazione grafica di questa legge è evidentemente una retta: si parla in questo caso di moto *uniforme*. Definiamo *velocità* v del moto il rapporto fra il cammino percorso e il tempo impiegato a percorrerlo:

$$v = \frac{\text{cammino percorso}}{\text{tempo impiegato}} \quad [1]$$

Nel nostro esempio il punto percorre $\frac{1}{2}$ centimetro al secondo e la velocità resta costante e vale $\frac{1}{2}$ cm/s. L'unità di misura della ve-

locità è già fissata da questa definizione, ed è la velocità che il punto avrebbe se percorresse 1 cm/s. Si tratta di una unità *derivata*, che, senza introdurre una nuova parola, chiameremo centimetro al secondo. Per esprimere il fatto che una misura di velocità può essere ricondotta a misure di lunghezze e di tempi, in accordo con la formula [1], diremo anche che la velocità ha le *dimensioni* d'una lunghezza divisa per un tempo, e scriveremo $[v] = [l/t]$ o $[l \cdot t^{-1}]$. Possiamo analogamente assegnare dimensioni definite ad ogni grandezza fisica che sia derivabile dalle quantità fondamentali: lunghezza l , tempo t , forza-peso p ; per le corrispondenti unità di misura, possiamo scegliere ad esempio: cm, s, g-peso.

Nel caso di grandi velocità il cammino percorso in un secondo è grande, perciò la retta che rappresenta la legge del moto è poco inclinata rispetto all'asse x : quanto più piccola è la velocità, tanto più inclinata sarà la retta. Un punto che si trovi in quiete ha velocità nulla ed è rappresentato nel nostro diagramma mediante una retta parallela all'asse t , in quanto i punti di questa retta hanno lo stesso valore di x per ogni valore del tempo t (fig. 8).

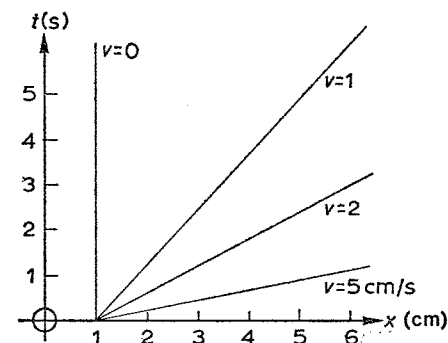


Fig. 8. Moto uniforme con velocità diverse: $v = 0, 1, 2, 5$ cm/s.

Se un punto parte da una posizione di riposo, acquista improvvisamente una certa velocità e quindi continua il suo moto con questa

velocità, il grafico è costituito di una linea spezzata che sarà in parte verticale e in parte inclinata (fig. 9a). Il caso in cui un punto, che inizialmente si muove di moto uniforme da sinistra o da destra, poi cambia bruscamente velocità, è rappresentato analogamente da spezzate (figg. 9b, c, d).

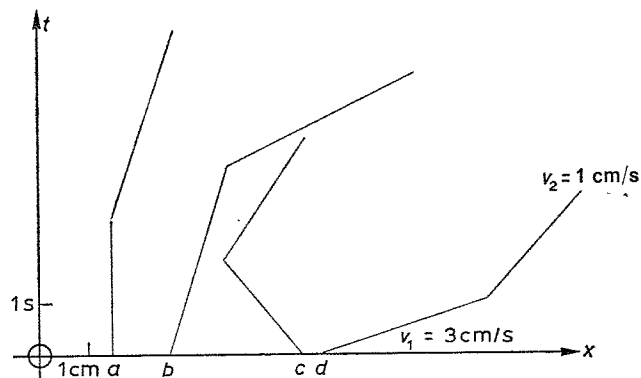


Fig. 9. Moti uniformi con brusche variazioni di velocità.

Dette v_1 (ad esempio 3 cm/s) e v_2 (ad esempio 5 cm/s) le velocità che il punto possiede rispettivamente prima e dopo la brusca variazione, l'incremento della velocità è $v_2 - v_1$ (cioè 2 cm/s). Se v_2 è minore di v_1 (ad esempio $v_2 = 1$ cm/s), $v_2 - v_1$ sarà negativo (cioè -2 cm/s), e ciò denota chiaramente che il punto in moto è bruscamente ritardato (fig. 9d).

Il moto di un punto soggetto a una serie di brusche variazioni di velocità è rappresentato graficamente da una poligonale, come è mostrato nella figura 10.

Se le variazioni di velocità sono molto frequenti e sufficientemente piccole, la poligonale potrà confondersi con una curva, che rappresenta perciò il moto di un punto la cui velocità subisca variazioni continue; tale moto non è uniforme, ma accelerato o ritardato (fig. 11). In questo caso una misura esatta della velocità e della

“rapidità” con cui la velocità varia nel tempo (accelerazione), può essere ottenuta soltanto ricorrendo al calcolo differenziale. Possiamo tuttavia pensare di sostituire la curva continua con una spezzata i cui segmenti rappresentino moti uniformi con velocità definite. Possiamo supporre che i vertici di questa poligonale (cioè le brusche variazioni di velocità) si succedano a intervalli di tempo uguali (ad esempio $\tau = 1/n$ s).

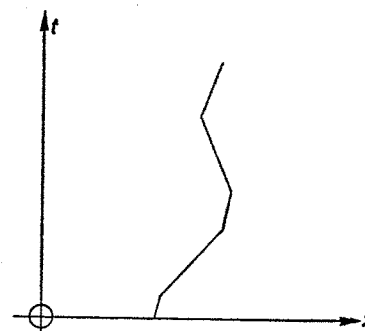


Fig. 10. Moto di un punto soggetto a brusche variazioni di velocità.

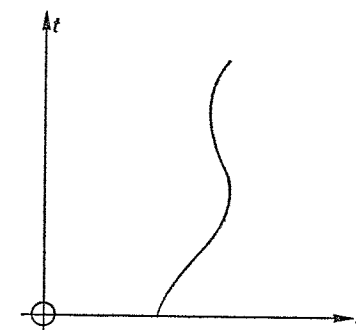


Fig. 11. Moto di un punto la cui velocità subisce variazioni continue.

Se inoltre queste variazioni sono tutte di uguale intensità, il moto si dice uniformemente accelerato. Indicheremo con w il valore di ciascuna variazione di velocità; allora, se ve ne sono n al secondo, la variazione totale di velocità al secondo è:

$$nw \text{ al secondo} = w/\tau = a. \quad [2]$$

Per esempio dalla figura 12:

$$\tau = \frac{1}{10} \text{ s}, \quad n = 10,$$

$$w = 10 \text{ cm/s},$$

$$v_0 = 5, \quad v_1 = 15, \quad v_2 = 25 \text{ cm/s} \dots$$

$$a = \frac{w}{\tau} = 100 \text{ cm/s}^2.$$

La quantità a è la misura dell'*accelerazione*, le cui dimensioni sono evidentemente $[a]=[v/t]=[l/t^2]$. Nel nostro sistema di misura, l'unità di accelerazione (cioè l'accelerazione che produce una variazione unitaria di velocità nell'unità di tempo) è espressa da 1 cm/s^2 .

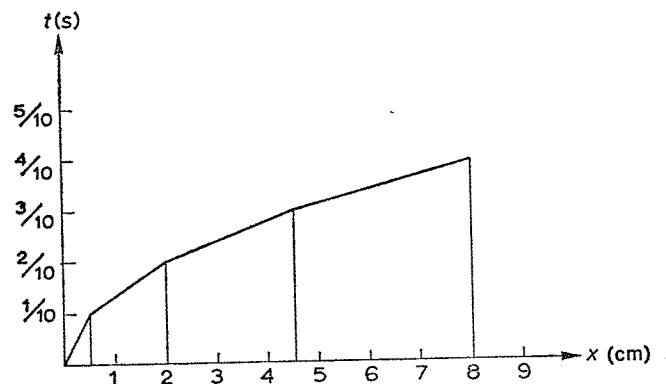


Fig. 12. Un punto parte al tempo $t=0$ da $x=0$ con la velocità di 5 cm/s e subisce una variazione di velocità di 10 cm/s dopo ogni decimo di secondo.

Proponiamo di ricavare ora la legge del moto di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato. Dividiamo a tale scopo il tempo t in n intervalli uguali,* e supponiamo che il punto subisca un brusco aumento di velocità w alla fine di ogni piccolo intervallo di tempo t/n . Questo intervallo può essere legato all'accelerazione a , attraverso la [2], sostituendo τ con t/n , di modo che: $w=a(t/n)$.

Se il punto parte con velocità nulla da $x=0$ al tempo $t=0$, la velocità assume i seguenti valori:

dopo il primo intervallo di tempo:

$$v_1 = w;$$

* In questo caso dividiamo in n parti un arbitrario intervallo di tempo t e non, come prima, l'unità di tempo, 1 s.

dopo il secondo intervallo di tempo:

$$v_2 = v_1 + w = 2w;$$

dopo il terzo intervallo di tempo:

$$v_3 = v_2 + w = 3w$$

e così via.

In corrispondenza il punto raggiunge le posizioni:

dopo il primo intervallo di tempo:

$$x_1 = v_1(t/n);$$

dopo il secondo intervallo di tempo:

$$x_2 = x_1 + v_2(t/n) = (v_1 + v_2)(t/n);$$

dopo il terzo intervallo di tempo:

$$x_3 = x_2 + v_3(t/n) = (v_1 + v_2 + v_3)(t/n)$$

e così via.

Dopo l' n -esimo intervallo di tempo, il punto avrà percorso il tratto:

$$x = (v_1 + \dots + v_n)t/n.$$

D'altra parte:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1w + \dots + nw = (1 + 2 + \dots + n)w.$$

Possiamo eseguire abbastanza semplicemente la somma dei numeri da 1 a n , sommando il primo e l'ultimo, il secondo e il penultimo, e così di seguito; la somma dei due numeri che formano ciascuna coppia vale sempre $n+1$. Poiché il numero di tali coppie è $n/2$, si ha $1 + 2 + \dots + n = (n/2)(n+1)$. Sostituendo poi w con at/n , si ottiene

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = (n/2)(n+1)(at/n) = (at/2)(n+1)$$

e infine

$$x = (at/2)(n+1)(t/n) = (at^2/2)(1 + 1/n).$$

Poiché n può essere scelto arbitrariamente grande, possiamo trascurare $1/n$ e ottenere quindi:

$$x = \frac{1}{2}at^2.$$

Questo significa che gli spazi percorsi dal punto sono proporzionali ai quadrati dei tempi. Se, ad esempio, l'accelerazione vale $a=100 \text{ cm/s}^2$, allora dopo 1 s il punto si è spostato di 50 cm, dopo 2 s di $50 \times 2^2=200 \text{ cm}$, dopo 3 s di $50 \times 3^2=450 \text{ cm}$, e così via. Usando intervalli di tempo più piccoli, ad esempio di $1/10 \text{ s}$, vediamo che il punto ha percorso $1/2 \times 100 \times (1/10)^2=1/2 \text{ cm}$ dopo il primo decimo di secondo, $1/2 \times 100 \times (2/10)^2=2 \text{ cm}$ dopo il secondo decimo di secondo ecc.

La relazione precedente è rappresentata graficamente da una linea curva, detta parabola, nel piano xt (fig. 13). Se si confronta la figura 12 con la figura 13, si vede che la poligonale costituisce una

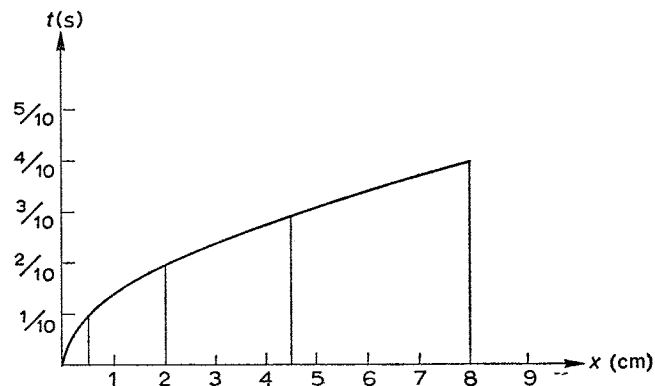


Fig. 13. Un punto parte da $x=0$ al tempo $t=0$ con l'accelerazione di 100 cm/s^2 . Confrontare con la figura 12.

approssimazione della parabola. In entrambe le figure è stata scelta l'accelerazione $a=100 \text{ cm/s}^2$, ed è proprio questa scelta che determina l'aspetto delle due curve.

Possiamo anche applicare il concetto di accelerazione a moti non uniformemente accelerati, usando, invece di 1 s, un tempo di osservazione tanto piccolo da poter ritenere il moto uniformemente accelerato. L'accelerazione allora varierà in modo continuo in funzione del tempo.

Tutte queste definizioni diventano rigorose, e nello stesso tempo facili da trattare, se si studia accuratamente il processo di suddivisione in piccoli intervalli durante i quali si può ritenere che la grandezza in esame rimanga costante. Questo conduce al concetto di limite, che è il punto di partenza del calcolo differenziale. Storicamente fu Newton che, durante le sue ricerche riguardanti il problema del moto, inventò il calcolo differenziale e il suo inverso, il calcolo integrale.

La *teoria del moto* (cinematica) precede la meccanica delle forze propriamente detta, o dinamica. Si tratta evidentemente di una specie di geometria del moto. In particolare, nella nostra rappresentazione grafica ogni moto è caratterizzato da una configurazione geometrica nel piano delle coordinate x, t . Con ciò ci troviamo di fronte a qualcosa di più di una semplice analogia; infatti siamo davanti al principio di relatività, che annette un'importanza fondamentale all'introduzione del tempo come coordinata oltre alle dimensioni spaziali.

3. Il moto nel piano

Ci proponiamo ora di studiare il moto di un punto in un piano. Possiamo subito estendere a questo caso il nostro metodo di rappresentazione. Fissiamo, sul piano, un sistema di coordinate x, y , e costruiamo un asse t ad esso perpendicolare (fig. 14). Allora una retta, nello spazio x, y, t , corrisponderà a un moto rettilineo e uniforme nel piano xy . Se infatti si proiettano sul piano xy i punti della retta corrispondenti ai valori $t=0, 1, 2, 3, \dots \text{ s}$ del tempo, si vede che le proiezioni di questi punti vengono a trovarsi su una retta, a uguale distanza l'una dall'altra.

Un moto non rettilineo si dice *accelerato* anche se la sua traiettoria *curva* viene descritta con velocità *costante*. In questo caso, infatti, cambia la *direzione* della velocità, mentre il suo valore nume-

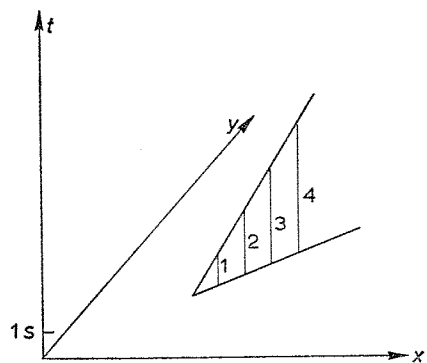


Fig. 14. Moto uniforme in un piano riferito a un sistema di coordinate x, y, t . Dopo 1, 2, 3, 4, ... s, il punto del piano x, y ha raggiunto il piede della parallela contrassegnata rispettivamente dal numero 1, 2, 3, 4, ...

rico (scalare) rimane costante. Un moto accelerato è rappresentato nello spazio x, y, t (fig. 15) da una curva arbitraria. Proiettando tale curva sul piano xy , si ottiene l'orbita piana. La velocità e l'accelera-

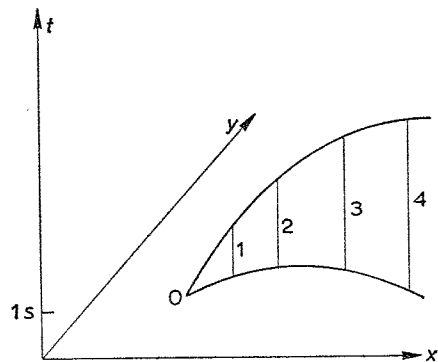


Fig. 15. Moto accelerato in un piano (vedi la didascalia della fig. 14).

zione sono di nuovo calcolate immaginando di sostituire alla curva un poligono che la involupi strettamente. In corrispondenza di ogni vertice di questo poligono, la velocità varia non solo in grandezza, ma anche in direzione. Un'analisi più accurata del concetto di accelerazione ci porterebbe troppo lontano; è sufficiente ricordare che è preferibile proiettare il grafico del punto in moto sugli assi coordinati xy , e occuparci del moto rettilineo di queste due proiezioni, cioè di come variano col tempo le coordinate x, y . A questi moti proiettati possiamo applicare i concetti che abbiamo definito nel caso del moto rettilineo. Si hanno così due *componenti della velocità*, v_x e v_y , e due *componenti dell'accelerazione*, a_x e a_y , che complessivamente determinano la velocità e l'accelerazione del punto in moto, in un dato istante.

Nel caso di un moto piano (e anche di un moto che avvenga nello spazio), la velocità e l'accelerazione sono perciò grandezze

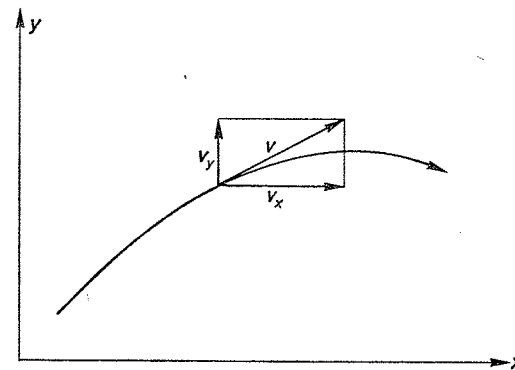


Fig. 16. Componenti v_x e v_y della velocità v di un moto piano.

direzionali (vettori); esse hanno una direzione e un'intensità ben definite. Quest'ultima può essere calcolata una volta che siano note le componenti. Ad esempio, la velocità è determinata, in grandezza e direzione, dalla diagonale del rettangolo di lati v_x e v_y (fig. 16).

Si ottiene allora, applicando il teorema di Pitagora:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad [3]$$

Un risultato analogo vale per l'accelerazione.

4. Il moto circolare

C'è solo un caso che vogliamo approfondire, quello del moto di un punto che descrive un'orbita circolare con velocità costante (fig. 17a). Secondo quanto è già stato detto, tale moto è accelerato, poiché la direzione della velocità varia costantemente. Se il moto non fosse accelerato, il punto proseguirebbe il suo moto da A su una linea retta con velocità costante v . Ma in realtà il punto deve rimanere su una circonferenza, e perciò deve avere una velocità supplementare, oppure un'accelerazione diretta verso il centro M , chiamata *accelerazione centripeta*. Essa fa in modo che la velocità in un punto B , vicino ad A , raggiunto dopo un breve intervallo τ , abbia una direzione diversa da quella che si ha nel punto A . In un altro diagramma (fig. 17b) sono disegnate le velocità relative ai

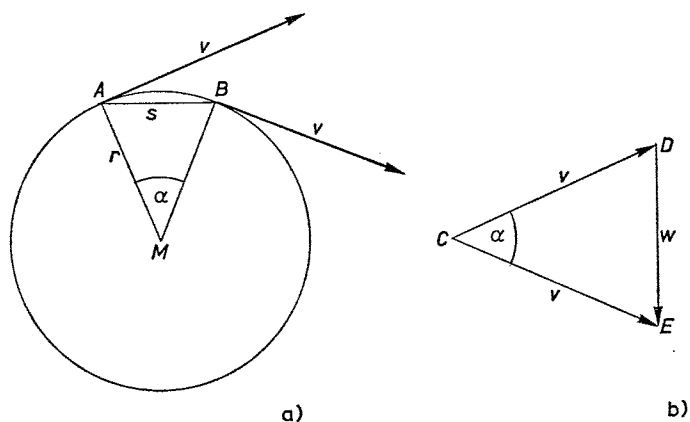


Fig. 17. Accelerazione centripeta nel caso di un moto circolare di velocità costante v .

punti A e B da un punto C ai punti E e D , tenendo conto della loro intensità e direzione (CD e CE). Esse avranno la stessa intensità v , poiché la circonferenza dev'essere percorsa alla stessa velocità, ma la loro direzione sarà diversa. Congiungendo fra loro gli estremi D ed E dei segmenti che raffigurano le due velocità, si ottiene un segmento, DE , che rappresenta la velocità supplementare w , cioè la variazione che la velocità in B ha subito rispetto a quella in A . Si ottiene così il triangolo isoscele CED , che ha come base w e come lati v , e si vede subito che l'angolo al vertice α è uguale all'angolo al centro sotteso dall'arco AB descritto dal punto. Infatti le velocità in A e in B sono perpendicolari ai raggi MA ed MB , e quindi delimitano lo stesso angolo. Di conseguenza i due triangoli isosceli MAB e CDE sono simili; si ha perciò la proporzione:

$$\frac{DE}{CD} = \frac{AB}{MA}.$$

Ora $DE=w$, $CD=v$, MA è uguale al raggio r della circonferenza e inoltre AB è uguale all'arco s , a meno di un errore trascurabile che può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo sufficientemente piccolo il tempo τ .

Si ottiene quindi

$$\frac{w}{v} = \frac{s}{r} \quad \text{da cui} \quad w = sv/r.$$

Dividiamo per τ e osserviamo che $s/\tau=v$, $w/\tau=a$. Allora l'accelerazione

$$a = v^2/r, \quad [4]$$

cioè l'accelerazione centripeta, è uguale al quadrato della velocità del punto sulla circonferenza diviso per il raggio.

Questo teorema, come vedremo, costituisce la base di una delle prime e più importanti verifiche sperimentali della teoria della gravitazione di Newton.

Forse non è superfluo farsi un'idea chiara di come il nostro moto circolare uniforme venga rappresentato nello spazio x, y, t . Questo, ovviamente, si attua permettendo al punto in moto di muoversi uniformemente verso l'alto in direzione parallela all'asse t , durante il moto circolare. Si ottiene così un'elica (filettatura della vite), che rappresenta ora completamente la traiettoria e l'andamento nel tempo del moto. Nella figura 18 l'elica è disegnata sulla superficie di un cilindro la cui base giace nel piano xy .

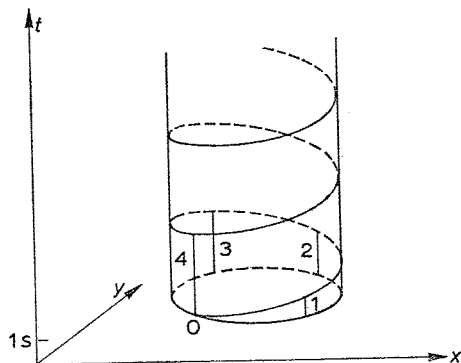


Fig. 18. Rappresentazione di un moto circolare con velocità costante. La velocità v e il raggio della circonferenza sono scelti in modo tale che dopo quattro secondi il punto abbia percorso la circonferenza esattamente una volta.

5. Il moto nello spazio

Il nostro metodo di rappresentazione grafica non si può più applicare al caso di moti che avvengono nello spazio; infatti in tal caso abbiamo tre coordinate spaziali x, y, z , a cui dobbiamo aggiungere il tempo come quarta coordinata. Ma sfortunatamente le nostre possibilità visive sono limitate allo spazio tridimensionale. A questo punto deve venirci incontro il linguaggio simbolico della matematica. Infatti i metodi della *geometria analitica* ci permettono di trattare

le proprietà e le relazioni delle configurazioni nello spazio da un punto di vista puramente matematico, senza dover ricorrere alle nostre capacità visive, o aver bisogno di disegnare figure. Questo metodo è in effetti assai più efficace di quello basato sulla costruzione geometrica. Innanzitutto, non è limitato a spazi di tre dimensioni, ma si può anche estendere a uno spazio di quattro o più dimensioni. Nel linguaggio matematico, uno spazio a più di tre dimensioni non costituisce affatto un concetto "mistico", ma è semplicemente un'espressione abbreviata del fatto che stiamo considerando oggetti che sono completamente determinati da più di tre numeri. Così la posizione d'un punto in un dato istante può essere determinata soltanto assegnando quattro numeri, vale a dire le tre coordinate spaziali x, y, z e il tempo t . Dopo aver imparato a considerare lo spazio x, y, z, t come mezzo per descrivere il moto piano, non sarà difficile trattare anche il moto nello spazio a tre dimensioni servendoci di curve nello spazio x, y, z, t . Quest'idea della cinematica, concepita come geometria in uno spazio a quattro dimensioni x, y, z, t , ha il vantaggio di permetterci d'applicare allo studio del moto le ben note leggi della geometria. Essa ha tuttavia un significato ancor più profondo, che emergerà nella discussione della teoria di Einstein. Faremo vedere che i concetti di spazio e di tempo, che si deducono da esperienze di tipo del tutto diverso, non possono affatto essere differenziati come oggetti di misura fisica. Se la fisica deve basarsi sul fatto di considerare reale unicamente ciò che è fisicamente osservabile, essa deve riunire i concetti di spazio e di tempo in un concetto unitario più ampio, costituito da un'estensione a quattro dimensioni, che Minkowski chiamò l'"universo" (1908). Con esso egli volle significare che l'elemento rappresentativo di un oggetto reale non è la posizione e l'istante di tempo, ma l'"evento" o il "punto d'universo", cioè una posizione in un determinato istante. Egli diede il nome di "linea d'universo" alla rappresentazione grafica di un punto in moto. Continueremo, in seguito, a usare quest'espressione. Così un moto rettilineo e uniforme corrisponde a una linea d'universo retta, e un moto accelerato a una linea d'universo curva.

6. Dinamica; la legge d'inerzia

Dopo questi preliminari ritorniamo al problema da cui siamo partiti, vale a dire in quale modo le forze generino il moto.

Il caso più semplice è quello in cui le forze mancano del tutto. Sarà certamente impossibile, allora, mettere in moto un corpo che si trovi in quiete. Gli antichi avevano già fatto tale scoperta, ma, più che questo, essi ritenevano anche che fosse vero il contrario, cioè che dovunque ci fosse un moto, dovevano esserci delle forze in grado di conservare lo stato di moto. Questa concezione dà immediatamente luogo a difficoltà, se si riflette sulla causa che induce una pietra o un giavelotto, lanciati dalla nostra mano, a continuare il loro moto dopo essere stati lasciati dalla mano. È ovviamente la mano che ha messo in moto gli oggetti, ma la sua azione termina non appena il moto ha realmente inizio. Gli antichi pensatori incontrarono parecchie difficoltà nel tentativo di scoprire a quali forze dovesse effettivamente essere imputato lo stato di moto di una pietra lanciata. Galileo fu il primo ad assumere il giusto punto di vista sull'argomento. Egli osservò che è un errore pensare che dovunque ci sia un moto, debba necessariamente esserci una forza. Ci si doveva chiedere, piuttosto, se esistesse qualche quantità caratteristica del moto legata in modo costante e regolare alla forza; ad esempio la posizione, la velocità, l'accelerazione del corpo in moto, oppure qualche grandezza composta dipendente da tutte queste. Nessuna riflessione di carattere filosofico può consentirci di dare una risposta. Dobbiamo rivolgerci direttamente alla natura. La risposta che essa dà è che la forza esercita un'influenza nell'effettuare *variazioni* di velocità; non è necessaria invece alcuna forza per mantenere uno stato di moto in cui la grandezza e la direzione della velocità restano invariate. D'altra parte, in assenza di forze si ha che sia la grandezza sia la direzione della velocità non subiscono variazioni; quindi un corpo che si trovi in quiete persevera in questo stato, e un corpo che si muova di moto rettilineo e uniforme continua a muoversi di moto rettilineo e uniforme.

Questa *legge d'inerzia* non è affatto così ovvia come potrebbe indurci a ritenere la sua semplice formulazione. Nella nostra esperienza non incontriamo mai corpi realmente esenti da influenze esterne, e, se ricorriamo alla nostra immaginazione nel descrivere in che modo essi singolarmente percorrano con velocità costante le loro traiettorie rettilinee nello spazio, ci si presenta subito il problema del percorso assolutamente rettilineo nello spazio supposto in quiete assoluta, col quale avremo a che fare in seguito. Ci limiteremo per ora a interpretare la legge d'inerzia nel senso ristretto in cui l'intese Galileo.

Consideriamo un tavolo liscio, perfettamente orizzontale, su cui si trovi una sfera levigata in quiete. A causa del suo peso, questa esercita una pressione sul tavolo. La sfera non è evidentemente soggetta a nessuna forza che agisca secondo una direzione orizzontale; se così fosse, la sfera non rimarrebbe in quiete in un punto del tavolo.

Ma se ora imprimiamo alla sfera una certa velocità, essa continuerà il suo moto lungo una linea retta, mentre la sua velocità diminuirà soltanto di pochissimo. Questo rallentamento fu considerato da Galileo come un effetto secondario, che doveva essere attribuito all'attrito del tavolo e dell'aria, per quanto non sia possibile, sulla base dei metodi statici da cui siamo partiti, provare l'esistenza di forze d'attrito. È proprio questa intuizione, che in un fenomeno sa distinguere ciò che è essenziale da ciò che è secondario, che caratterizza il grande scienziato.

La legge d'inerzia è in ogni caso verificata per il moto sul tavolo. Si è stabilito che in assenza di forze, la velocità rimane costante in grandezza e direzione.

Di conseguenza la forza sarà associata alla variazione di velocità, cioè all'accelerazione, e soltanto l'esperienza potrà decidere qual è la natura di questa corrispondenza.

7. L'impulso

Abbiamo fatto vedere che l'accelerazione di un moto non uniforme si può considerare come limite di rapidi cambiamenti di velo-

cià di brevi moti uniformi. Ci chiediamo, innanzitutto, in che modo una forza possa produrre una singola rapida variazione di velocità. È necessario, a questo scopo, che l'azione della forza si espliciti per un tempo molto piccolo; parleremo allora di forza istantanea o impulsiva. L'effetto di tale forza impulsiva non dipende soltanto dalla sua intensità, ma anche dalla durata della sua azione, per quanto breve questa possa essere. È opportuno introdurre ora una nuova grandezza, che chiamiamo *impulso* J , e che definiremo in base alla seguente considerazione: n impulsi J , costituiti ognuno dalla forza F che agisce per il tempo $\tau = 1/n$ s, che si susseguano senza interruzioni apprezzabili, avranno tutti lo stesso effetto, come se l'azione della forza F si esercitasse durante l'intero secondo. Possiamo quindi scrivere:

$$nJ \text{ al s} = (1/\tau)J = F$$

oppure

$$J = \tau F. \quad [5]$$

Per chiarire questo risultato, immaginiamo di collocare un peso su una delle due estremità di una leva a bracci uguali (quale, ad esempio, una bilancia) e supponiamo di battere assai rapidamente e in modo uniforme l'altra estremità imprimendo dei colpi sufficientemente forti, in modo da mantenere l'equilibrio, a meno di oscillazioni trascurabili (fig. 19). Com'è ovvio, dal momento che

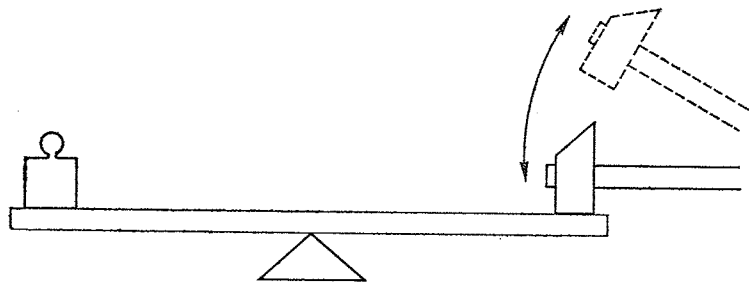


Fig. 19. Equilibrio di un peso realizzato attraverso una serie d'impulsi prodotti con un martello.

l'intensità J di un colpo moltiplicata per il numero di colpi al secondo, o divisa per la durata di ciascun colpo, è sempre uguale al peso F , possiamo esercitare dei colpi più deboli, ma con maggior frequenza, o più forti, con frequenza minore. Questa "bilancia" a impulsi ci permette di misurare l'intensità dei colpi anche quando non possiamo, singolarmente, conoscere la durata e la forza di ciascuno di essi. È solo necessario determinare la forza F che fa equilibrio a n colpi uguali in un secondo (senza tener conto delle oscillazioni trascurabili dei bracci); ogni colpo, allora, ha un'intensità pari alla n -esima parte di F .

Le dimensioni dell'impulso sono $[J] = [t \cdot G]$, dove G è il peso.

8. L'effetto di un impulso

Supponiamo di nuovo d'avere una sfera su un tavolo; vogliamo vedere qual effetto produce su di essa un impulso. Per questo ci serve un martello che oscilli, ad esempio, intorno a un asse orizzontale. Anzitutto, facendo uso della "bilancia a impulsi", tarriamo, per ogni oscillazione, l'intensità dei colpi del nostro martello. Facciamo poi urtare il martello contro la sfera ferma sul tavolo, e,

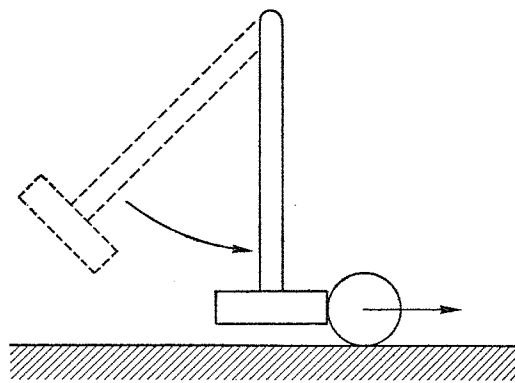


Fig. 20. Un martello urta contro una sfera posta su un piano. Gli impulsi sono proporzionali alle velocità della sfera.

dalla misura del numero di centimetri che essa percorre in un secondo, osserviamo qual è il valore della velocità acquistata in seguito all'urto (fig. 20). Il risultato che si ottiene è molto semplice: quanto all'urto (fig. 20). Il risultato che si ottiene è molto semplice: quanto più forte è il colpo, tanto più grande è la velocità. Infatti un colpo d'intensità doppia dà luogo a una velocità doppia, un colpo d'intensità tripla a una velocità tripla, e così via, vale a dire il rapporto tra la velocità e l'intensità del colpo è costante (cioè le due grandezze sono fra loro proporzionali). Se la sfera possiede una velocità iniziale, questa aumenterà o diminuirà secondo che il colpo che la sfera riceve venga o no impartito lungo la direzione del moto. Con un forte contraccolpo la direzione del moto può essere invertita.

L'effetto dovuto agli impulsi consiste in rapide variazioni di velocità che sono proporzionali agli impulsi che le determinano. Le velocità si considerano in questo caso positive o negative, secondo la loro direzione.

9. Massa e quantità di moto

Finora ci siamo limitati a considerare una sola sfera. Eseguiamo ora lo stesso esperimento sull'impulso con sfere di tipo diverso, cioè di dimensioni e composizione differenti; alcune le supporremo piene, e altre cave. Si immagini che tutte queste sfere siano messe in moto in seguito all'azione di "colpi" o impulsi esattamente uguali, impressi da un martello molto pesante. L'esperimento mostra che le sfere assumono allora velocità completamente diverse, e si osserva che le sfere più leggere viaggiano molto più velocemente di quelle più pesanti, purché il martello abbia un peso molto maggiore di quello di ciascuna sfera usata.

Si trova così una relazione col peso che esamineremo più avanti, poiché rappresenta una delle basi sperimentali della teoria della relatività generale. Da un punto di vista astratto, comunque, dobbiamo mettere in evidenza che il fatto secondo cui sfere diverse acquistano velocità diverse, sotto l'azione d'impulsi della stessa intensità, non ha niente e che fare col peso. Il peso è diretto verso il basso

e dà luogo quindi alla pressione esercitata dalla sfera sul tavolo, ma non esercita alcuna azione in senso orizzontale. Si trova che una sfera presenta all'urto una resistenza maggiore di un'altra; sperimentalmente si osserva che la prima sfera è anche quella che pesa di più. Tuttavia questa circostanza, secondo il punto di vista che abbiamo adottato, non può essere dedotta dalla definizione di peso. Quel che noi arriviamo a stabilire, è che le resistenze presentate dalle singole sfere agli urti sono diverse. Chiameremo tale resistenza *resistenza inerziale*, che definiremo come il rapporto tra l'impulso J e la velocità v misurata dalla quiete. A questo rapporto si è dato il nome di *massa*; esso s'indica col simbolo m . Abbiamo pertanto

$$m = J/v. \quad [6]$$

Questa formula esprime che, per un dato corpo, un aumento dell'impulso J produce un incremento di velocità v tale che il loro rapporto ha sempre lo stesso valore m . Una volta definita la massa in questo modo, la sua unità di misura non può più essere scelta arbitrariamente, perché le unità di misura della velocità e dell'impulso sono già state fissate. La massa ha le dimensioni:

$$[m] = \left[\frac{t^2 G}{l} \right],$$

e la sua unità nel sistema di misura comunemente usato è il g-peso·s²/cm.

Nel linguaggio ordinario la parola *massa* denota la quantità di sostanza (o di materia); di tale concetto non si dà altra definizione. L'idea di sostanza si considera di per sé evidente. In fisica, tuttavia, è bene sottolineare che la parola *massa* non ha altro significato di quello conferitole dalla formula [6]. Essa misura la resistenza che un corpo presenta alle variazioni di velocità.

Più generalmente possiamo scrivere la legge dell'impulso in questo modo:

$$mw = J. \quad [7]$$

Essa determina la *variazione* di velocità w a cui è soggetto un corpo quando viene messo in moto da un impulso J .

Il prodotto mw della massa per la velocità si chiama *quantità di moto* p . La quantità mw , dove w designa la variazione di velocità, rappresenta la variazione della quantità di moto prodotta dall'impulso J .

Fin qui abbiamo supposto che il martello sia tanto pesante da ritenere trascurabile la reazione dell'impulso su esso, quindi l'impulso è considerato come una quantità nota. In realtà ciò non è esatto; ci sarà una reazione sul martello, che non sarà più trascurabile qualora il peso (o, meglio, la massa) del martello non sia molto diverso da quello della sfera. I due corpi che si urtano saranno allora nelle stesse condizioni; questa circostanza verrà chiarita meglio sostituendo al martello un'altra sfera. Consideriamo perciò due corpi in moto lungo la stessa retta, rispettivamente di velocità v_1 e v_2 . Se i due corpi collidono, essi eserciteranno l'uno sull'altro delle forze impulsive. Indichiamo rispettivamente con J_1 e J_2 , l'impulso esercitato dal primo corpo sul secondo, e viceversa. Ora, in base al principio di Newton secondo il quale ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, le forze che i due corpi esercitano l'uno sull'altro saranno uguali e opposte, e poiché il loro breve tempo d'azione è lo stesso per entrambe, risulta che anche gl'impulsi saranno uguali e opposti, cioè: $J_2 = -J_1$. Di conseguenza la loro somma è zero:

$$J_1 + J_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 = 0. \quad [8]$$

Ne deriva che

$$w_2 = - (m_1/m_2) w_1,$$

cioè quando una sfera perde velocità (w_1 negativa), l'altra, invece, ne acquista (w_2 positiva), e viceversa.

Se introduciamo le velocità delle due sfere prima e dopo l'urto, vale a dire per la prima sfera v_1 e v_1' , e per la seconda v_2 e v_2' , allora

si hanno le variazioni di velocità

$$w_1 = v_1' - v_1, \quad w_2 = v_2' - v_2$$

e possiamo scrivere l'equazione [8] nel seguente modo:

$$m_1(v_1' - v_1) + m_2(v_2' - v_2) = 0.$$

Se poi raccogliamo da un lato tutte le quantità che si riferiscono al moto prima dell'urto, e dall'altro tutte quelle che si riferiscono al moto dopo l'urto, otteniamo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \quad [9]$$

A primo membro troviamo la quantità di moto totale $p = m_1 v_1 + m_2 v_2$ relativa alle sfere prima dell'urto, a secondo membro la quantità di moto totale $p' = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ dopo l'urto. Perciò abbiamo

$$p = p', \quad [9a]$$

che possiamo esprimere come segue: la quantità di moto totale di due corpi non varia in seguito all'urto. Questa è la legge della *conservazione della quantità di moto*.

10. Forza e accelerazione

Prima di continuare l'interessante confronto tra massa e peso, accennato nel paragrafo precedente, applicheremo al caso di forze agenti con continuità le leggi che finora abbiamo stabilito. Anche qui si possono formulare i teoremi in modo rigoroso soltanto ricorrendo ai metodi del calcolo infinitesimale. In ogni modo, le considerazioni seguenti potranno servire a dare un'idea, per quanto approssimata, delle relazioni con le quali avremo a che fare.

Una forza continua genera un moto in cui la velocità varia con continuità. Supponiamo ora che una forza di questo tipo sia sostituita

tuita da una rapida successione di colpi, o impulsi. Ad ogni colpo la velocità subirà allora una brusca variazione; si avrà una linea d'universo inclinata più volte, come nella figura 10, che approssimerà la linea di universo vera, continua, e che potrà essere usata nei calcoli in luogo di quest'ultima. Se ora l'azione della forza F è sostituita da quella di n colpi al secondo, dalla [5] si trae allora che l'intensità di ognuno di essi vale $J = \tau F$, dove τ è il breve intervallo di tempo durante il quale si esplica l'azione di ciascun colpo. Ad ogni impulso si verifica una variazione di velocità w , che, in base alla [7], è determinata da $mw = J = \tau F$. Ma dalla [2] si ha $w/\tau = a$, quindi:

$$ma = F. \quad [10]$$

Questa è la *legge del moto della dinamica* nel caso di forze continue. Essa afferma che *una forza produce un'accelerazione che è proporzionale ad essa; il rapporto costante $F:a$ è la massa.*

A questa legge possiamo dare una forma diversa, che in molti casi può essere vantaggiosa, ad esempio nella generalizzazione della dinamica di Einstein (vedi p. 327). Se la velocità v varia di una quantità w , allora la quantità di moto p del corpo in moto, cioè $p = mv$, varierà di mw . Si ha perciò $ma = mw/\tau$, che rappresenta la variazione subita dalla quantità di moto del corpo nel tempo τ necessario a effettuarla. Conseguentemente possiamo esprimere la legge fondamentale [10] nel seguente modo:

La quantità di moto $p = mv$ di un corpo sollecitato da una forza F , è tale che la sua variazione nell'unità di tempo è uguale a F .

In questa forma, la legge vale soltanto per moti che avvengono su una retta, la quale rappresenti anche la direzione lungo cui agisce la forza. In caso contrario, cioè se la direzione della forza è diversa da quella istantanea del moto, la legge dev'essere generalizzata. Supponiamo che la forza sia rappresentata da una freccia, la quale sia poi proiettata su tre direzioni fra loro perpendicolari,

cioè gli assi coordinati. La figura 21 rappresenta la forza agente nel piano xy , con le sue proiezioni sugli assi x e y . Analogamente, immaginiamo di proiettare sugli assi il punto in moto. Le proiezioni del punto descriveranno allora un moto sui rispettivi assi di

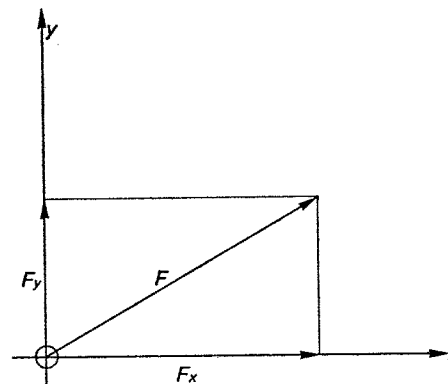


Fig. 21. Le componenti F_x e F_y di una forza F in un piano di coordinate x e y .

proiezione. Pertanto la legge $ma = F$ ci permette di correlare le accelerazioni che competono a tali moti, con le corrispondenti componenti della forza. Non entreremo però nei particolari di queste generalizzazioni matematiche; esse, d'altronde, non implicano nessun concetto nuovo.

11. Esempio: le vibrazioni elastiche

Per fornire un esempio della relazione esistente tra forza, massa e accelerazione, consideriamo un corpo che, sotto l'azione di forze elastiche, si metta a vibrare. Prendiamo una molla di acciaio, larga e diritta, e fissiamola poi a un estremo in modo che la sua posizione di riposo sia orizzontale (e la molla non penda verso il basso). All'altro estremo fissiamo una sfera (fig. 22); questa può allora oscillare nel piano orizzontale avanti e indietro. La gravità non esercita alcuna influenza sul suo moto; esso dipende soltanto dalla forza

elastica della molla. Quando gli spostamenti sono piccoli, la sfera si muove quasi su una linea retta. La direzione lungo cui si muove sia l'asse x .

La sfera, messa in moto, compie un'oscillazione periodica di cui possiamo comprendere la natura in base a quanto segue.

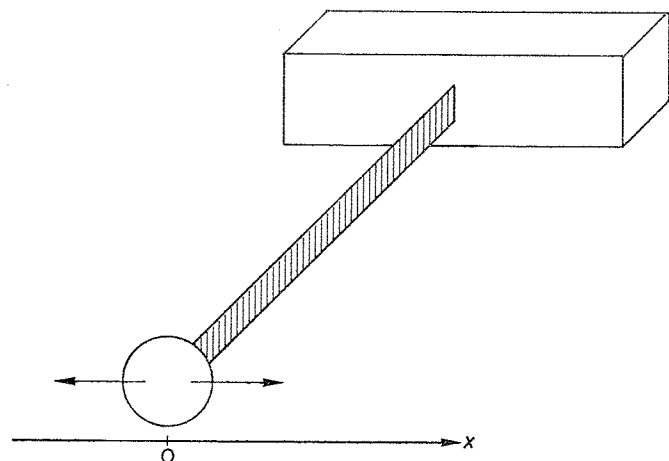


Fig. 22. Posizione d'equilibrio di una sfera fissata a una molla orizzontale a nastro (pendolo elastico).

Se, con le nostre mani, spostiamo lievemente la sfera dalla sua posizione d'equilibrio, avvertiamo la presenza della forza di richiamo della molla. Se ora lasciamo andare la sfera, tale forza comunica ad essa un'accelerazione tale da farla ritornare verso la posizione intermedia con velocità crescente. In questo processo la forza di richiamo, e quindi anche l'accelerazione, diminuiscono gradualmente fino a diventare zero quando la sfera passa per la posizione intermedia, poiché qui la sfera è in equilibrio e nessuna forza accelerante agisce su essa. Pertanto dove la velocità è massima si ha la minima accelerazione. In seguito alla sua inerzia, la sfera passa rapidamente attraverso la posizione d'equilibrio, poi la forza della

molla comincia a rallentarla e, per così dire, frena il movimento. Quando, dall'altra parte, si arriva a uno spostamento uguale a quello iniziale, la velocità è zero, e la forza raggiunge il suo valore massimo. Nello stesso tempo diventa massima l'accelerazione, mentre s'inverte in questo istante la direzione della velocità. Da questo punto in poi il processo si ripete al contrario.

Sostituendo la sfera con un'altra di massa diversa, si vede che il carattere del moto rimane lo stesso, ma il periodo di oscillazione è cambiato. Se la massa è più grande il moto è rallentato e l'accelerazione è diminuita; se la massa è più piccola invece si ha che il numero di oscillazioni al secondo aumenta.

In molti casi si può assumere che la forza di richiamo F sia esattamente proporzionale alla direzione x . Potremmo rappresentare geometricamente l'andamento del moto come segue: consideriamo un punto P che descriva uniformemente una circonferenza di raggio r , compiendo un giro completo nel tempo T . Allora il numero di giri al secondo è dato da $\nu=1/T$. Il punto P percorre la circonferenza, $2\pi r$ (dove $\pi=3,14\dots$), con velocità $2\pi r/T=2\pi r\nu$. Se P descrive, nel tempo τ , un piccolo arco s si ottiene la velocità $s/\tau=2\pi r\nu$.

Supponiamo ora che il centro O della circonferenza coincida con l'origine di un sistema di riferimento cartesiano in cui P abbia coordinate x, y . Allora il punto A , proiezione di P sull'asse delle x , si muoverà su tale asse durante il moto P avanti e indietro, proprio come la massa fissata alla molla. Il punto A rappresenta la massa oscillante. Se P descrive, in senso orario, una piccola distanza s , A percorrerà, lungo la direzione positiva dell'asse x , una piccola distanza ξ , con velocità $v=\xi/\tau$. La figura 23 mostra che gli spostamenti ξ ed s si possono riguardare come il lato e l'ipotenusa di un piccolo triangolo rettangolo simile al triangolo rettangolo OAP , in quanto i lati corrispondenti sono fra loro perpendicolari. Possiamo quindi stabilire la proporzione

$$\xi/s = y/r,$$

da cui

$$\xi = sy/r.$$

Perciò la velocità di A diventa

$$v = \frac{\xi}{\tau} = \frac{s}{\tau} \times \frac{y}{r} = 2\pi\nu y.$$

Ora il punto B , proiezione di P sull'asse delle y , compie su tale asse esattamente lo stesso moto oscillatorio. Durante i piccoli spo-

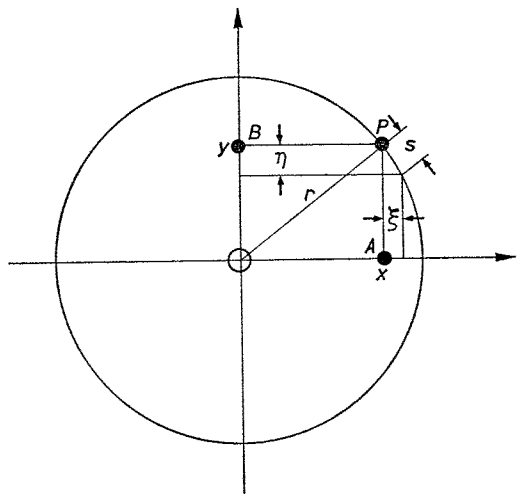


Fig. 23. Rappresentazione del moto del pendolo elastico della figura 22 tramite la proiezione A sull'asse x di un punto P che si muove su una circonferenza con velocità costante.

stamenti s di P , il punto B retrocede di una distanza η e analogamente a quanto abbiamo stabilito per ξ , si ottiene:

$$\frac{\eta}{s} = -\frac{x}{r} \quad \text{da cui} \quad \eta = -s \times \frac{x}{r};$$

η è negativo, perciò si riscontra una diminuzione di y .

La variazione η subita da y , corrisponde a una variazione della

velocità $v=2\pi\nu y$ del punto A , data da

$$w = 2\pi\nu\eta = -2\pi\nu s \frac{x}{r}.$$

Il segno meno di w indica che la velocità diminuisce. L'accelerazione vale

$$a = \frac{w}{\tau} = -2\pi\nu \frac{s}{\tau} \times \frac{x}{r} = -(2\pi\nu)^2 x$$

e anch'essa ha segno negativo.

In questo moto oscillatorio del punto A , quindi, l'accelerazione è in ogni istante proporzionale allo spostamento x . Per la forza abbiamo:

$$F = ma = -m(2\pi\nu)^2 x. \quad [11]$$

Il segno negativo di F significa che la forza tende sempre a riportare la sfera nella sua posizione d'equilibrio $x=0$.

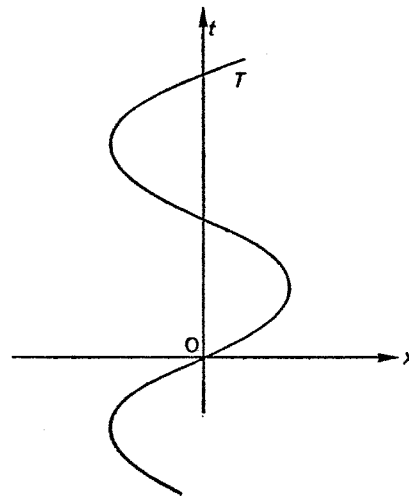


Fig. 24. Oscillazione del pendolo elastico nel piano xt . T è il periodo d'oscillazione.

Misurando la forza corrispondente allo spostamento x e contando il numero d'oscillazioni, si può determinare la massa m del pendolo elastico.

La linea d'universo di tale vibrazione è chiaramente rappresentata nel piano xt da una curva a forma di "onda", dove x è la direzione di oscillazione (fig. 24). Nella figura, si è convenuto che al tempo $t=0$ la sfera passasse per la posizione centrale $x=0$ muovendo verso destra. Si nota che ogni volta che la sfera attraversa l'asse t , cioè quando $x=0$, la direzione della curva è più inclinata rispetto all'asse x , e ciò vuol dire che si ha la massima velocità. Perciò la linea ha curvatura nulla in questo punto, e la variazione di velocità, cioè l'accelerazione, è zero. Succede il contrario per i punti che corrispondono alle deviazioni estreme.

12. Peso e massa

All'inizio di questo capitolo, nell'introdurre il concetto di massa, abbiamo osservato che tra la massa e il peso esiste un notevole parallelismo. I corpi pesanti, quando sono sottoposti all'azione di una forza che tende ad accelerarli, presentano una resistenza maggiore di quelli leggeri. È questa una legge rigorosa? In effetti lo è. Per chiarire questo fatto, prendiamo di nuovo in considerazione l'esperimento che consiste nel mettere in moto, mediante urti o impulsi, delle sfere su un tavolo liscio orizzontale. Supponiamo di avere due sfere, A e B , delle quali B sia due volte più pesante di A ; in altri termini, se poniamo B su una bilancia, essa fa esattamente equilibrio a due pesi ciascuno dei quali è uguale a quello della sfera A . Successivamente applichiamo alle sfere A e B , poste sul tavolo, due spinte uguali, e osserviamo quale velocità compete ad ognuna delle due. Si trova che A si muove con velocità doppia di quella di B .

Pertanto la sfera B , che pesa il doppio di A , oppone alla variazione di velocità una resistenza esattamente doppia di quella di A . Possiamo anche esprimere tale circostanza come segue: corpi la cui

massa è uguale al doppio di quella di un certo corpo, sono tali che anche il loro peso è il doppio del peso di quel corpo; oppure, più generalmente, possiamo affermare che le masse m sono proporzionali ai pesi G . Il rapporto tra il peso e la massa, che denoteremo con g , è una quantità definita; si ha:

$$G/m = g \quad \text{oppure} \quad G = mg. \quad [12]$$

Naturalmente l'esperimento che abbiamo usato per illustrare questa legge è molto grossolano.* Ma ci sono molti altri fenomeni che mettono in evidenza lo stesso fatto; in particolare, il fenomeno in base al quale tutti i corpi cadono con ugual velocità, ovviamente nell'ipotesi che nessuna forza, oltre a quella di gravità, influenzi il moto. Ciò significa che l'esperimento dev'essere compiuto *nel vuoto*, di modo che si possa eliminare la resistenza dell'aria. Ai fini della dimostrazione possiamo servirci di un piano inclinato (fig. 25), sul quale supponiamo rotolino due sfere di uguali dimensioni ma di pesi diversi. Si osserva che esse raggiungono il fondo nello stesso istante.

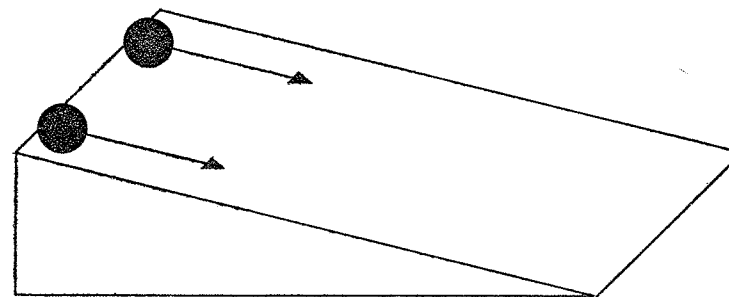


Fig. 25. Due sfere di uguali dimensioni ma di pesi diversi rotolano sul piano inclinato con la stessa velocità.

* Per esempio, abbiamo trascurato il fatto che nel produrre la rotazione della sfera bisogna tener conto di una resistenza addizionale che dipende dalla distribuzione della massa all'interno della sfera (il momento d'inerzia).

La forza responsabile del moto è il peso; la massa, invece, determina la resistenza. Poiché tali grandezze sono fra loro proporzionali, un corpo pesante subirà una sollecitazione più forte di quella che si avrà per un corpo più leggero, ma in compenso quest'ultimo offre una minor resistenza alla forza agente; si ha quindi come risultato che il corpo pesante e quello leggero scivolano giù o cadono con la stessa velocità. Si può giungere alla medesima conclusione esaminando le nostre formule. Infatti, se nella [10] sostituiamo la forza col peso G e assumiamo, in base alla [12], che questo sia proporzionale alla massa, otteniamo

$$ma = G = mg,$$

cioè

$$a = g. \quad [13]$$

Quindi i corpi soggetti soltanto all'azione della gravità hanno tutti la stessa accelerazione, che è diretta verso il basso lungo la verticale (questo sia nell'ipotesi che il corpo cada da fermo, sia che si tratti di un lancio). La quantità g , cioè l'accelerazione dovuta alla gravità, vale

$$g = 981 \text{ cm/s}^2.$$

Esperimenti più accurati, che hanno lo scopo di dimostrare questa legge, possono essere effettuati con l'aiuto di un pendolo semplice, costituito di una sferetta appesa a un filo sottile. Newton osservò che i periodi d'oscillazione, per pendoli di uguale lunghezza, sono sempre gli stessi, qualunque sia la composizione della sferetta. Il processo d'oscillazione coincide esattamente con quello che abbiamo in precedenza descritto nel caso del pendolo elastico, tranne che ora non è una molla d'acciaio, ma la forza di gravità a spingere indietro la sfera. Immaginiamo ora di scomporre la forza di gravità che agisce sulla sfera in due componenti, di cui una abbia la direzione del filo teso, e l'altra quella del moto, cioè sia tangente alla traiettoria della sferetta.

La figura 26 rappresenta la sferetta spostata di un tratto di lunghezza x . Dalla similitudine dei due triangoli rettangoli che risultano dalla figura, possiamo stabilire la proporzione:

$$\frac{F}{x} = -\frac{G}{l}.$$

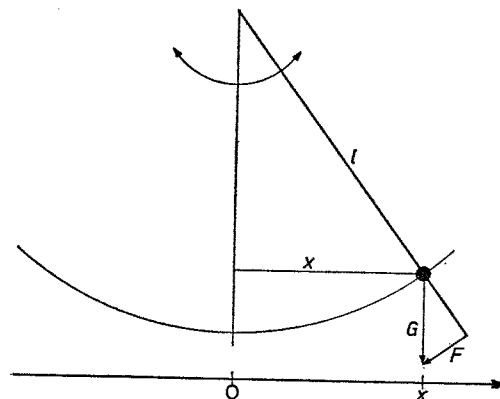


Fig. 26. Rappresentazione delle forze agenti su un pendolo a filo.

Il segno negativo di F indica di nuovo che la forza è diretta verso la posizione d'equilibrio $x=0$. Di conseguenza nel caso di due pendoli rispettivamente di pesi G_1 e G_2 , dalla formula [11] si deducono le relazioni:

$$(2\pi\nu)^2 m_1 = G_1/l, \quad (2\pi\nu)^2 m_2 = G_2/l$$

da cui

$$\frac{G_1}{m_1} = \frac{G_2}{m_2} = (2\pi\nu)^2 l,$$

cioè, per i due pendoli, si ha lo stesso valore del rapporto peso: massa, che nella formula [12] abbiamo indicato con g . Si ottiene quindi l'equazione:

$$g = (2\pi\nu)^2 l, \quad [14]$$

dalla quale si vede che g può essere determinata in base alla misura della lunghezza l e della frequenza ν del pendolo.

La legge di proporzionalità tra il peso e la massa viene spesso espressa nel seguente modo: *la massa gravitazionale e la massa inerziale sono uguali*.

Col termine “massa gravitazionale”, intendiamo qui semplicemente il peso diviso per g , ed invece alla massa propria premettiamo l’aggettivo “inerziale”.

La validità di questa legge era già nota a Newton. Ai nostri giorni è stata confermata dalle accurate misure eseguite da Eötvös (1890). È quindi perfettamente lecito usare la bilancia non solo per confrontare i pesi, ma anche le masse.

Si potrebbe pensare che tale legge sia strettamente connessa con i principi della meccanica. Ma ciò non è affatto vero, come risulta dalla nostra esposizione basata sui concetti della meccanica classica. Essa, piuttosto, è legata un po’ vagamente, quasi come una cosa estranea, alla costruzione delle altre leggi. Probabilmente per molti fu motivo di meraviglia, ma nessuno sospettò, e intravide, che in essa potesse celarsi qualche relazione più profonda. Su una data massa, infatti, possono agire molti tipi di forze. Perché non potrebbe esistere una forza tale da essere esattamente proporzionale alla massa? Una domanda a cui nessuno *senta l’esigenza* di rispondere rimarrà senza risposta. Per secoli le cose non cambiarono; ciò fu dovuto essenzialmente allo strepitoso successo della meccanica di Galileo e di Newton. Essa non solo regolava i moti dei corpi sulla terra, ma anche quelli degli astri, e si rivelò una base sicura per tutti i campi della scienza. E invero, a metà del diciannovesimo secolo si pensava che lo scopo di ogni ricerca consistesse nell’interpretare i fenomeni fisici facendo ricorso alla meccanica newtoniana. Nel costruire il loro imponente edificio, i fisici dimenticarono di accertare se le basi di partenza fossero sufficientemente solide. Einstein fu il primo a riconoscere l’importanza della legge che stabilisce l’uguaglianza della massa inerziale e di quella gravitazionale per i fondamenti delle scienze fisiche.

13. La meccanica analitica

Il problema fondamentale della meccanica analitica, consiste nel ricavare il moto partendo dalla legge

$$ma = F,$$

qualora siano note le forze F . Tale formula ci dà soltanto l’accelerazione, cioè la variazione di velocità. Il problema di ottenere da questa la velocità, e, infine, dalla velocità la posizione variabile del punto in moto, riguarda il calcolo integrale, e può diventare assai difficile se la forza è una funzione complicata delle coordinate spaziali e del tempo. Per avere un’idea della natura del problema, si ricordi come abbiamo derivato la variazione di posizione nel caso di un moto uniformemente accelerato lungo una retta (pp. 35-38). Il moto diventa più complicato quando avviene in un piano ed è dovuto all’azione di una forza costante di direzione definita, come nel caso di un corpo che sia lasciato cadere o che sia lanciato. Anche qui possiamo sostituire approssimativamente al moto reale continuo, un moto fittizio, costituito di una serie di moti uniformi, ognuno dei quali si trasformi nel successivo in seguito all’azione di impulsi. Utilizziamo di nuovo il nostro piano orizzontale su cui rotola una sfera, alla quale daremo un “colpo” d’intensità e verso costanti, a intervalli brevi e uguali τ (fig. 27). Ora, se la sfera parte dal punto O con una velocità iniziale arbitraria, dopo il tempo τ arriva nel punto 1, dove riceve il primo urto. Da questo punto essa prosegue il suo cammino in un’altra direzione con velocità diversa per un tempo τ , fino a quando non viene percossa da un secondo colpo, nel punto 2, che la fa di nuovo deviare, e così di seguito. Ogni singola deflessione può essere determinata in base alla legge degli impulsi. Possiamo conseguentemente disegnare l’intero moto; si nota che il punto, la direzione, la velocità iniziale determinano completamente l’andamento del moto susseguente. Questo moto “a sbalzi” ci dà un’idea approssimata di come avviene il moto di una sfera su di un piano

inclinato. Tanto più il grafico si avvicina al moto continuo effettivo, quanto più gli intervalli di tempo fra gli urti successivi sono piccoli.

Tale costruzione approssimata può essere sostituita, nel caso di forze continue, con una trattazione rigorosa basata sui metodi del calcolo integrale. Anche in questo caso il punto da cui si parte, la

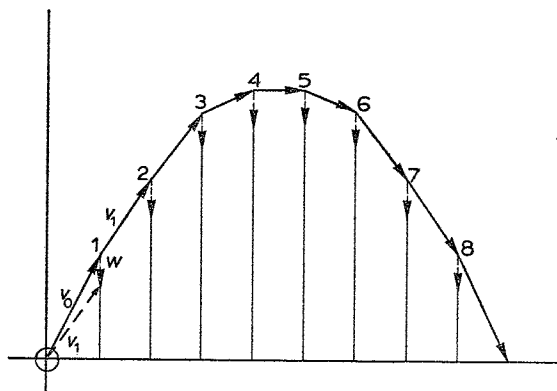


Fig. 27. Moto di una sfera su di un piano. Nei punti 1, 2, ..., 8 la sfera è sottoposta a urti della stessa intensità, che producono una variazione di velocità w .

grandezza e la direzione della velocità iniziale restano del tutto arbitrari. Ma una volta che questi siano assegnati, l'ulteriore andamento del moto è completamente determinato. Così una sola legge, quella della forza, può dar luogo a un'infinità di moti a seconda della scelta delle condizioni iniziali, dimodoché il gran numero di moti di corpi lasciati cadere o lanciati dipende dalla stessa legge della forza (ora la forza è quella di gravità, che agisce verticalmente dall'alto verso il basso).

Nei problemi di meccanica non ci troviamo di solito di fronte al moto di un solo corpo, ma abbiamo a che fare col moto di molti corpi, che si influenzano a vicenda. Le forze non sono date, ma dipendono dal moto incognito. Naturalmente, il problema di determinare matematicamente il moto di più corpi diventa molto complicato.

14. La legge dell'energia

Esiste tuttavia una legge che rende assai più semplici questi problemi e permette di considerare il moto da un punto di vista generale. Si tratta della *legge di conservazione dell'energia*, che ha assunto un'importanza determinante nello sviluppo della fisica. Non possiamo qui naturalmente darne una formulazione generale o dimostrarla. Ci limiteremo a illustrarne il contenuto mediante semplici esempi.

Un pendolo, che venga lasciato oscillare non appena la sferetta ad esso appesa sia stata portata in una certa posizione, raggiunge, dalla parte opposta rispetto al minimo dell'oscillazione, la medesima altezza — se si esclude una piccola differenza causata dall'attrito e dalla resistenza dell'aria (fig. 28). Se sostituiamo la traiettoria circolare con un'altra, cioè, ad esempio, lasciando correre la sfera su delle rotaie simili a quelle di un "trenino" (fig. 29), si osserva ancora lo stesso risultato: la sfera raggiunge sempre la stessa altezza che aveva in partenza.

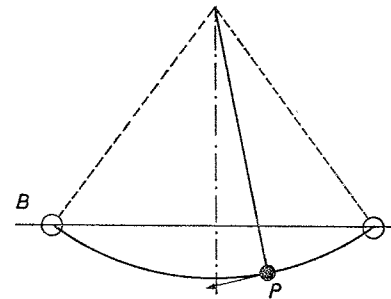


Fig. 28. La sferetta appesa, che muove a partire da A, raggiunge una posizione B ad uguale altezza.

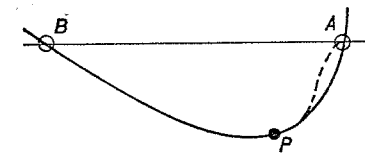


Fig. 29. Se la sfera parte da A, il punto d'inversione B si troverà alla stessa altezza, indipendentemente dalla forma della traiettoria. La velocità in P è determinata unicamente dal dislivello esistente fra P e A.

Da ciò segue ovviamente che la velocità della sfera in un qualsiasi punto P del suo percorso dipende unicamente dall'altezza di P al di sotto del punto iniziale A . Immaginiamo infatti di modificare il tratto AP del percorso, lasciando l'altro, PB , inalterato. Ora, se la sfera, partendo da A , raggiungesse P lungo un'altra traiettoria, con una velocità diversa da quella con cui era giunta percorrendo la prima traiettoria, allora nel suo ulteriore cammino da P a B non potrebbe raggiungere esattamente in entrambi i casi lo stesso punto B . Infatti, per poter raggiungere tale punto, è chiaramente necessario che in P si abbia una velocità univocamente determinata. Di conseguenza la velocità in P non dipende dalla forma del tratto di cammino percorso, e poiché P è un punto arbitrario, il risultato è valido in generale. Quindi la velocità v dev'essere essenzialmente determinata dalla sola altezza di caduta h . La validità di questa legge dipende dall'ipotesi che le rotaie non offrano alcuna resistenza al moto (cioè, non esercitino nessuna forza sulla sfera nella direzione del moto) ma subiscano soltanto la sua pressione verticale. Se non ci fossero le rotaie avremmo il caso di un corpo in caduta libera, o di un corpo che sia stato lanciato, e si otterrebbe lo stesso risultato: la velocità in ciascun punto dipende solo dal dislivello di caduta.

Non solo ciò si può stabilire sperimentalmente, ma si può anche dedurre dalla legge del moto. Si può quindi ottenere la legge che mette in relazione la velocità all'altezza; vale a dire: sia x la distanza di un corpo dalla terra (fig. 30), e v , m e G rispettivamente la velocità, la massa e il peso del corpo. Allora la quantità:

$$E = (m/2)v^2 + Gx \quad [15]$$

ha lo stesso valore durante tutto il processo di caduta.

Per dimostrare questo, supponiamo dapprima che E rappresenti una grandezza arbitraria che dipenda dal moto e che perciò vari da istante a istante. Immaginiamo che E vari di una quantità e nel piccolo intervallo di tempo τ ; il rapporto e/τ sarà chiamato, allora, la variazione di E nell'unità di tempo, ed esattamente come abbiamo

fatto prima nel definire la velocità orbitale v e l'accelerazione a , assumeremo che l'intervallo di tempo τ si possa rendere piccolo a piacere. Se la quantità E non cambia nel tempo, allora la sua variazione (nell'unità di tempo) è ovviamente zero, e viceversa. La varia-

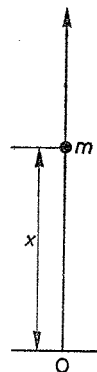


Fig. 30. La coordinata x misura la distanza del corpo dalla superficie terrestre ($x=0$).

zione e di E può essere determinata come segue: nel tempo τ l'altezza x diminuisce di $v\tau$ e la velocità aumenta di $w = ba\tau$. Pertanto, dopo il tempo τ , il valore di E diventa:

$$E' = \frac{m}{2}(v+w)^2 + G(x-v\tau).$$

Però

$$(v+w)^2 = v^2 + w^2 + 2vw.$$

Questa relazione esprime che il quadrato costruito su v e w , presi consecutivamente su una stessa retta, può essere scomposto in un quadrato di lato v , in uno di lato w e in due rettangoli uguali di lati v e w (fig. 31). Si ha perciò

$$E' = \frac{m}{2}v^2 + \frac{m}{2}w^2 + mvw + Gx - Gv\tau.$$

Sottraendo da questa espressione il precedente valore di E , si ottiene:

$$e = E' - E = \frac{m}{2} w^2 + mvw - Gv\tau,$$

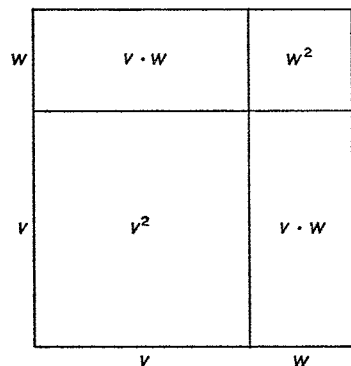


Fig. 31. $(v + w)^2 = v^2 + w^2 + 2vw$.

oppure, dal momento che $w = a\tau$:

$$e = \frac{m}{2} a^2 \tau^2 + mv a \tau - Gv \tau.$$

Quindi la variazione (nell'unità di tempo) diventa

$$\frac{e}{\tau} = \frac{m}{2} a^2 \tau + mv a - Gv.$$

Il termine che contiene τ si può trascurare, poiché può essere reso infinitamente piccolo assumendo intervalli di tempo infinitesimi. Quindi si ha in definitiva per la variazione di E :

$$\frac{e}{\tau} = v(ma - G).$$

Ma dalle leggi della meccanica si trae che tale espressione vale zero, in quanto, come si ha dalla [13], $ma = mg = G$. Abbiamo per-

tanto dimostrato che la quantità E definita dalla [15] è costante nel tempo. Se sono dati il punto iniziale e la velocità iniziale del moto, cioè i valori di x e v per $t=0$, allora l'espressione di E , secondo la [15], ha un ben definito valore che conserva durante tutto il moto.

Segue da ciò che se il corpo s'innalza, cioè se x cresce, v deve diminuire e viceversa. Uno dei due termini che intervengono nell'espressione di E può aumentare solo a scapito dell'altro. Il primo termine è una misura della velocità del corpo; il secondo, una misura dell'altezza che esso ha raggiunto vincendo la forza di gravità. Questi termini hanno denominazioni particolari:

$T = (m/2)v^2$ si chiama *forza viva*, o *energia cinetica*;

$U = Gx$ viene detto *capacità di compiere lavoro*, o *energia potenziale*.

La loro somma

$$T + U = E \quad [16]$$

si chiama semplicemente *energia meccanica* del corpo, e la legge che afferma che essa rimane costante durante il moto del corpo, prende il nome di legge di *conservazione dell'energia*.

Le dimensioni dell'energia sono $[E] = [G \cdot l]$; la sua unità di misura è il g-peso \times cm.

La frase *capacità di compiere lavoro* deriva naturalmente dal lavoro fatto dal corpo umano nel sollevare un peso. In base alla legge di conservazione dell'energia, questo lavoro, durante il processo di caduta, si trasforma in energia cinetica. Se, d'altra parte, si conferisce a un corpo un'energia cinetica tale da lanciarlo verso l'alto, quest'energia si trasforma in energia potenziale, e capacità di compiere lavoro.

Nel caso più generale di sistemi costituiti di molti corpi, valgono le stesse proprietà che sono state descritte per il moto relativo alla caduta di un corpo; soltanto, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1) il sistema non dev'essere influenzato da eventi esterni; esso cioè dev'essere isolato;

2) non devono verificarsi fenomeni nei quali si abbia la trasformazione d'energia meccanica in energia termica, elettrica, chimica e così via.

Se queste condizioni sono verificate, la legge in base alla quale

$$E = T + U$$

resta sempre costante, continua a valere; in essa l'energia cinetica dipende dalla velocità e l'energia potenziale dalle posizioni dei corpi in moto.

Nella meccanica celeste questo caso ideale è perfettamente realizzato. Qui la meccanica "ideale" di cui abbiamo sviluppato i principi è rigorosamente valida. Sulla terra però le cose vanno in modo del tutto differente. Tutti i moti sono soggetti all'attrito, e quindi la loro energia viene trasformata in calore. Le macchine che utilizziamo per produrre il moto trasformano forze termiche, chimiche, elettriche e magnetiche in forze meccaniche, perciò la legge della conservazione dell'energia, nella sua ristretta formulazione meccanica, non si può applicare. Essa continua tuttavia a valere, in una forma più generale. Se indichiamo con Q , C e W rispettivamente l'energia termica, chimica ed elettromagnetica, e così via, si può stabilire allora, per sistemi chiusi, la legge secondo cui la somma

$$E = T + U + Q + C + W + \dots \quad [17]$$

è sempre costante.

Parlare della scoperta e dello sviluppo logico di questo fatto, dovuto a Robert Mayer, Joule (1842) e Helmholtz (1847), o occuparci di come si possano determinare quantitativamente le forme d'energia diverse da quella meccanica, ci condurrebbe troppo lontano. Faremo tuttavia uso del concetto d'energia più avanti, parlando dello stretto legame tra massa ed energia, la cui esistenza è stata rivelata dalla teoria della relatività.

15. *Le unità dinamiche della forza e della massa*

Il metodo in base al quale abbiamo derivato le leggi fondamentali della meccanica, con esperimenti compiuti su piani orizzontali

o inclinati, oppure servendoci di un pendolo o di altrettanto semplici dispositivi, limita in apparenza la validità di tali leggi. Abbiamo dedotto i nostri concetti e le nostre leggi idealizzando esperienze di laboratorio; ciò presenta il vantaggio di evitare d'affrontare le difficoltà inerenti al problema della definizione dello spazio e del tempo. Nei moti rettilinei considerati dalla legge d'inerzia le distanze possono essere misurate sul tavolo con un regolo. Si suppone che per misurare le traiettorie e i moti siano a disposizione compassi, regoli e orologi.

Ci proponiamo ora di uscire dai ristretti confini delle nostre stanze, per esaminare quel che succede nello spazio astronomico. Il primo stadio consisterà in un "viaggio intorno al mondo", inteso non come universo, ma come globo terrestre. Ci poniamo il problema: le leggi della meccanica, sono valide tanto in un laboratorio di Buenos Aires o di Città del Capo, quanto in un laboratorio che si trovi a Berlino o a New York?

La risposta è sì, ma con un'eccezione: cambia il valore dell'accelerazione di gravità g . Abbiamo visto che questa può essere misurata con precisione per mezzo di osservazioni con pendoli. Si è trovato però che lo stesso pendolo oscilla un po' più lentamente all'equatore che in regioni situate più a sud o più a nord; è risultato che nel corso di un giorno, cioè durante una rotazione terrestre, si verifica un minor numero di oscillazioni. Si deduce da ciò che il valore di g è minimo all'equatore, mentre aumenta regolarmente in direzione nord e sud, fino a diventare massimo ai poli. La causa di questo fatto, che per ora ci siamo limitati a mettere in evidenza, verrà esaminata in seguito. Tuttavia esso dà origine a qualche difficoltà per quanto concerne la scelta del sistema che abbiamo finora usato nel misurare le forze e le masse.

Se confrontiamo fra loro i pesi servendoci soltanto di una bilancia graduata, non andiamo incontro ad alcuna difficoltà. Ma supponiamo di avere in laboratorio una bilancia a molla (dinamometro) che sia stata tarata mediante dei pesi. Trasportando tale bilancia

a molla in zone più a sud, o più a nord, rispetto a quella in cui ci troviamo, e applicando ad essa gli stessi pesi, si trova che questa subisce deflessioni diverse. Se perciò consideriamo il peso e la forza equivalenti, come abbiamo fatto finora, sembra a prima vista che si debba asserire che è cambiata la forza della molla, e che ciò dipende dalla latitudine geografica. Ma ovviamente non è questo che accade. Non è la forza della molla che è cambiata, bensì la forza gravitazionale. È perciò errato assumere il peso dello stesso campione metallico come unità di forza in tutti i punti della terra. Possiamo scegliere, come unità di forza, il peso di un determinato corpo in un punto definito della terra. Possiamo poi considerare altri punti della terra, purché sia nota l'accelerazione g dovuta alla gravità. Ciò è proprio quello che si fa nelle scienze tecniche in cui si assume come unità di forza il peso di un ben determinato corpo che si trova a Parigi. Fin qui abbiamo sempre usato tale unità di forza senza tener conto della sua variabilità con la posizione. Tuttavia nelle misure rigorose il valore deve essere ridotto a quello che si trova a Parigi.

La scienza si è allontanata da questo sistema di misura, in cui un luogo della terra è privilegiato, e ha scelto un sistema che è meno arbitrario.

La stessa legge fondamentale della meccanica suggerisce a questo proposito un metodo opportuno. Invece di riferire la massa alla forza, assumiamo la massa come grandezza fondamentale, a cui attribuiamo una dimensione indipendente m , e scegliamo la sua unità arbitrariamente: un certo campione definito di metallo che rappresenta l'unità di massa. In realtà, a tale scopo si prende lo stesso campione di metallo che viene adottato dalla tecnica (e che si trova a Parigi); l'unità di massa è detta grammo-massa (g_m , o semplicemente g).

D'ora in poi useremo il sistema di misura fisico, le cui unità fondamentali sono il centimetro per la lunghezza, il secondo per il tempo e il grammo per la massa.

La forza ha ora le dimensioni (derivate):

$$[F] = [m \cdot a] = \left[\frac{ml}{t^2} \right],$$

e la sua unità, chiamata dina, è il $g \cdot \text{cm}/\text{s}^2$.

Il peso è definito dall'equazione $G = mg$; quindi l'unità di massa ha peso $G = 1 g \times g$, e cambia con la latitudine geografica. Alla nostra latitudine, G ha il valore di 981 dine che è l'unità di forza usata nella tecnica. La forza, espressa in dine, esercitata da una bilancia a molla è naturalmente una costante; infatti la sua capacità d'accelerare una massa definita è indipendente dalla latitudine geografica.

Le dimensioni dell'impulso (o della quantità di moto) sono:

$$[J] = [tF] = \left[\frac{ml}{t} \right] = [mv] = [p],$$

e la sua unità è il $g \cdot \text{cm}/\text{s}$. Infine le dimensioni dell'energia sono

$$[E] = [mv^2] = \left[\frac{ml^2}{t^2} \right],$$

e la sua unità è il $g \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2$.

Ora che abbiamo eliminato dal sistema di misura tutte le imperfezioni di carattere terrestre, possiamo passare alla meccanica dei corpi celesti.

3.

*L'universo di Newton*1. *Spazio assoluto e tempo assoluto*

I principi della meccanica qui sviluppati, furono in parte suggeriti a Newton dalle opere di Galileo, e in parte sono dovuti a lui solo. A Newton dobbiamo, specialmente, le definizioni e le leggi poste in forma così generale da apparire indipendenti da esperimenti limitati alla terra, e da essere quindi applicabili anche a eventi nello spazio astronomico.

Nel formulare queste leggi, Newton dovette premettere, ai principi effettivi della meccanica, delle asserzioni definite concernenti lo spazio e il tempo, senza le quali anche la legge più semplice della meccanica, la legge d'inerzia, è priva di significato. Secondo questa legge, un corpo su cui non agisce alcuna forza si muove uniformemente in linea retta. Riconsideriamo l'esperienza già fatta precedentemente con una sfera rotolante su di un tavolo e supponiamo che ora la sfera rotoli sul tavolo descrivendo una retta; un osservatore che ne seguisse e ne misurasse la traiettoria da un altro pianeta, affermerebbe, secondo il suo punto di vista, che essa non è rettilinea. Infatti la terra stessa ruota, quindi un moto, che rispetto a un osservatore solidale a questa è rettilineo in quanto sul suo tavolo lascia la traccia di una linea retta, deve apparire curvo a un altro osservatore che non sia solidale alla terra in rotazione. Possiamo approssimativamente illustrare questo fatto nel modo che segue.

Si monta un disco di cartone bianco su un asse, in modo da poterlo girare con l'aiuto di un'impugnatura. Si fissa poi un regolo

davanti al disco. Giriamo ora il disco quanto più uniformemente è possibile, e nello stesso tempo facciamo scorrere con velocità costante una matita lungo il regolo; questa tratterà il suo cammino sul disco, che non sarà naturalmente una retta, ma una linea curva, che può anche assumere la forma di un cappio se il moto rotatorio è sufficientemente rapido. Perciò lo stesso moto che un osservatore solidale al regolo chiamerebbe uniforme e rettilineo, sarebbe definito curvilineo (e non uniforme) da un osservatore in moto col disco. Tale moto si può costruire punto per punto, come è illustrato nel disegno (fig. 32).

Questo esempio mostra chiaramente che la legge d'inerzia ha senso, in realtà, soltanto quando si specifica esattamente lo spazio, o piuttosto, il sistema di riferimento rispetto al quale il moto deve essere rettilineo.

Secondo la descrizione copernicana dell'universo, naturalmente, si assume come sistema di riferimento per cui è valida la legge di inerzia, non la terra ma un sistema fisso, in qualche modo, nello spazio astronomico. In esperimenti compiuti sulla terra (ad esempio, quello della sfera che rotola su un tavolo) il cammino di un corpo che si muove liberamente non è in effetti rettilineo, ma leggermente incurvato. Il fatto che ciò sfugga alla nostra osservazione immediata è dovuto soltanto alla circostanza che le traiettorie percorse negli esperimenti sono piccole rispetto alle dimensioni della terra. Come spesso è accaduto nella scienza, anche in questo caso la mancanza di accuratezza nell'osservazione ha portato alla scoperta di un fatto importante. Se Galileo fosse stato in grado di compiere osservazioni così raffinate come quelle dei secoli successivi, l'accumularsi confuso dei fenomeni avrebbe reso molto più difficile la scoperta delle leggi. Forse Kepler non avrebbe mai potuto rivelare i moti dei pianeti se le orbite gli fossero state note con la precisione attuale. Infatti le ellissi di Kepler sono soltanto approssimazioni da cui le orbite reali si discostano nel corso di lunghi intervalli di tempo. Un fatto analogo si verificò anche nel caso della fisica moderna, a proposito delle regolarità degli spettri; la scoperta di relazioni

semplici fu resa più difficile e di gran lunga ritardata dalla sovrabbondanza dei dati osservati.

Newton fu posto quindi dinanzi al compito di trovare il sistema di riferimento in cui fossero valide la legge d'inerzia e tutte le altre leggi della meccanica. Se egli avesse scelto il sole, il problema non sarebbe stato risolto, ma soltanto differito, in quanto si sarebbe

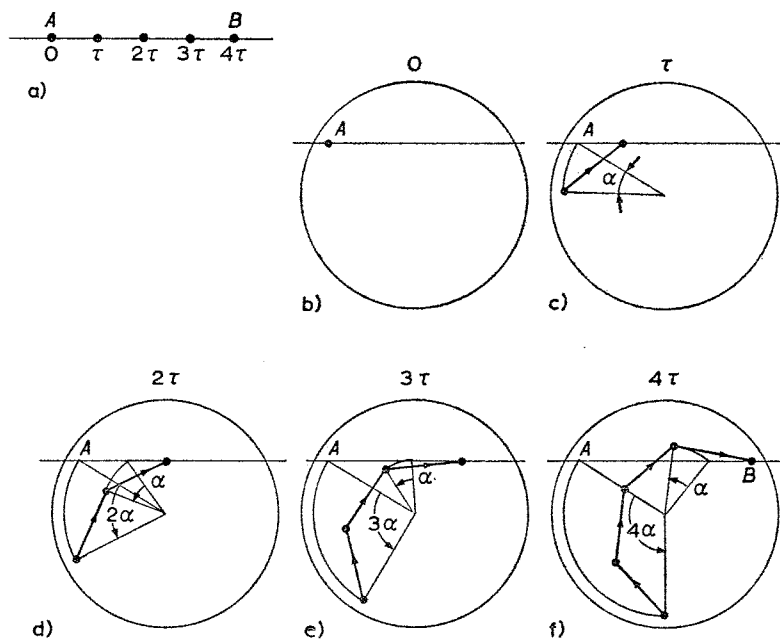


Fig. 32. a) Un corpo si muove uniformemente da A a B in quattro intervalli di tempo τ ; un osservatore in quiete osserva il moto.
 b) $t=0$: il corpo si trova in A ; l'osservatore segna questo punto con un cerchio nero.
 c) $t=\tau$: la posizione del corpo è indicata da un punto e segnata con un cerchio nero; il disco, e con esso il cerchio nero segnato nella figura 32b, è ruotato di un angolo α .
 d-f) L'osservatore ha continuato a segnare la posizione del corpo nello stesso modo. La poligonale congiungente i cerchi neri rappresenta, approssimativamente, il percorso del corpo sul disco in moto.

potuto scoprire, un giorno, che anche il sole si muove, come in realtà è avvenuto nel frattempo.

Fu probabilmente per tali ragioni che Newton giunse alla convinzione che un sistema di riferimento empirico, fissato da corpi materiali, non avrebbe mai potuto costituire il fondamento di una legge che implicasse il concetto d'inerzia. Ma la stessa legge, per il suo stretto legame con la teoria dello spazio di Euclide, di cui la retta è l'elemento basilare, appare come il punto di partenza naturale della dinamica dello spazio astronomico. È infatti nella legge d'inerzia che lo spazio euclideo si manifesta al di fuori dello stretto ambito terrestre. Condizioni analoghe si ottengono nel caso del tempo. Lo scorrere del tempo, infatti, si esprime attraverso il moto uniforme dovuto all'inerzia. Se si assumesse, ad esempio, come unità di tempo il periodo di rotazione della terra, la legge d'inerzia non sarebbe esattamente valida, per la presenza di alcune irregolarità nel moto della terra.

In questo modo Newton pervenne alla conclusione che esistessero uno spazio assoluto e un tempo assoluto. Sarà meglio riportare sostanzialmente le sue parole. Per quanto riguarda il tempo, egli scrisse:

Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamata durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno...

Infatti i giorni naturali, che di consueto sono ritenuti uguali, e sono usati come misura del tempo, sono inuguali. Gli astronomi correggono questa inuguaglianza affinché, con un tempo più vero, possano misurare i moti celesti. È possibile che non vi sia movimento talmente uniforme per mezzo del quale si possa misurare accuratamente il tempo. Tutti i movimenti possono essere accelerati o ritardati, ma il flusso del tempo assoluto non può essere mutato. Identica è la durata o la persistenza delle cose, sia che i moti vengano accelerati, sia che vengano ritardati, sia che vengano annullati...*

* I. NEWTON, *Principi matematici della filosofia naturale*, trad. A. Pala (UTET, Torino 1965).

Sullo spazio Newton espresse opinioni simili. Egli scrisse:

Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché d'esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile...

Così, invece dei luoghi e dei moti assoluti usiamo i relativi; né ciò riesce scomodo nelle cose umane: ma nella filosofia occorre astrarre dai sensi. Potrebbe anche darsi che non vi sia alcun corpo in quiete al quale possano venire riferiti sia i luoghi che i moti...*

L'affermazione in base alla quale lo spazio e il tempo assoluti esistono "indipendentemente da ogni oggetto esterno" sembra strana da parte di Newton, in quanto egli spesso dà risalto al fatto che intende indagare soltanto su ciò che è reale, che può cioè essere rilevato dall'osservazione. Il suo motto, definito e conciso, è "*hypotheses non fingo*". Tuttavia ciò che esiste "indipendentemente da ogni oggetto esterno" non è osservabile, e non costituisce un fatto reale. Ci troviamo qui evidentemente di fronte a un caso in cui sono state applicate, al mondo oggettivo, idee preconcepite sulla cui veridicità non era stato fatto alcun esame approfondito. Analizzeremo più avanti questo problema in dettaglio.

Il nostro prossimo obiettivo consiste nel descrivere il modo in cui Newton interpretò le leggi dell'universo, e come la sua teoria superò la concezione che si aveva allora del mondo.

2. Le legge di attrazione newtoniana

Newton sviluppò una teoria dinamica delle orbite dei pianeti, o, come diremmo oggi, fondò la *meccanica celeste*. A questo fine si rivelò necessario applicare il concetto di forza di Galileo al moto degli astri. A Newton si deve inoltre la scoperta della legge secondo cui i corpi celesti si influenzano a vicenda, e ciò senza partire da

* Newton, *op. cit.*

ipotesi ardite, ma basandosi su una rigorosa e sistematica analisi dei dati di osservazione relativi ai moti dei pianeti. Ai risultati delle osservazioni planetarie note a quel tempo fu data una splendida formulazione sintetica, espressa dalle tre leggi di Kepler, che qui riportiamo.

1) I pianeti percorrono orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei fuochi (fig. 33).

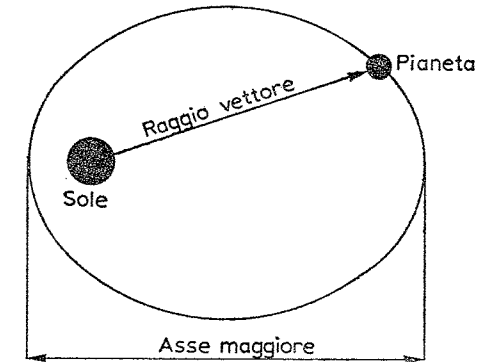


Fig. 33. L'orbita descritta da un pianeta nel suo moto intorno al sole è un'ellisse, di cui il sole occupa uno dei fuochi.

2) Il raggio vettore diretto dal sole verso un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.

3) I cubi degli assi maggiori delle ellissi sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzione.

In base alla legge fondamentale della meccanica, si può stabilire una relazione fra l'accelerazione a che compete al moto e la forza F che lo causa. L'accelerazione a , che è completamente determinata dalla descrizione del moto, ci permette di calcolare F . Newton osservò che l'orbita definita dalle leggi di Kepler era sufficiente per permettere il calcolo di a e quindi che la legge

$$F = ma$$

permette di calcolare la forza agente.

La matematica ordinaria del suo tempo non avrebbe consentito a Newton di realizzare il suo scopo. Egli era tuttavia già in possesso degli strumenti matematici di cui aveva bisogno, e cioè il calcolo differenziale e il calcolo integrale, scoperti quasi contemporaneamente da Leibniz (1684), e che oggi costituiscono una delle basi della matematica moderna. Nel suo libro fondamentale *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Newton evitò tuttavia l'impiego di questi nuovi mezzi, e ricorse invece ai soliti metodi di rappresentazione della geometria classica.

Noi seguiremo il metodo di Newton; ci limiteremo però a considerare un semplice esempio, allo scopo di illustrare i risultati generali a cui egli pervenne.

Le orbite dei pianeti sono ellissi di piccola eccentricità; sono, cioè, quasi delle circonferenze. È lecito assumere che i pianeti, nel loro moto intorno al sole, descrivano delle orbite approssimativamente circolari, come fu d'altra parte postulato da Copernico. Poiché una circonferenza non è altro che un'ellisse particolare, questa ipotesi soddisfa certamente la prima legge di Kepler.

Ora la seconda legge implica che un pianeta descriva la sua orbita circolare con velocità costante. Sappiamo già tutto sull'accelerazione di un moto circolare uniforme; essa è diretta verso il centro, e vale (vedi formula [4]):

$$a = v^2/r,$$

dove v è la velocità orbitale ed r il raggio della circonferenza.

La velocità orbitale è determinata dal rapporto fra la lunghezza della circonferenza, $2\pi r$, e il periodo di rivoluzione T :

$$v = 2\pi r/T; \quad [18]$$

si ha quindi:

$$a = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Dalla terza legge di Keplero, inoltre, si deduce ovviamente che nel caso di un'orbita circolare, il rapporto fra il cubo del raggio, r^3 ,

e il quadrato del periodo di rivoluzione, T^2 , ha lo stesso valore C per tutti i pianeti:

$$\frac{r^3}{T^2} = C \quad \text{oppure} \quad \frac{r}{T^2} = \frac{C}{r^2}. \quad [19]$$

Sostituendo questo valore nell'espressione precedente, si ottiene:

$$a = \frac{4\pi^2 C}{r^2}. \quad [20]$$

L'accelerazione centripeta dipende perciò soltanto dalla distanza del pianeta dal sole. Essa è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ma è del tutto indipendente dalle proprietà del pianeta (quale, ad esempio, la sua massa) poiché la grandezza C , come si trae dalla terza legge di Kepler, è la stessa per tutti i pianeti e al più quindi può interessare la natura del sole e non quella dei pianeti.

È notevole il fatto che anche nel caso di orbite ellittiche si ricavi la stessa legge, seppure con calcoli più laboriosi: l'accelerazione è sempre diretta verso il sole, che occupa uno dei fuochi, ed è data dalla [20], dove ora r è la lunghezza del raggio vettore (vedi fig. 33).

3. La gravitazione universale

La legge dell'accelerazione trovata nel paragrafo precedente ha in comune con la forza gravitazionale terrestre (peso) un'importante proprietà: è del tutto indipendente dalla natura del corpo in movimento. Se calcoliamo la forza partendo dall'accelerazione, otteniamo che anch'essa è diretta verso il sole; si tratta quindi di una forza attrattiva, il cui valore è dato da

$$F = ma = m(4\pi^2 C/r^2). \quad [21]$$

Essa è proporzionale alla massa del corpo in moto, proprio come avviene nel caso del peso, $G=mg$, di un corpo sulla terra.

Questo fatto suggerì a Newton l'idea che le due forze potessero

avere una medesima origine. Attualmente questa circostanza, che ci è stata tramandata attraverso i secoli, è diventata una verità talmente evidente che a mala pena possiamo avvertire l'arditezza e la grande portata dell'innovazione di Newton. Concepire il moto dei pianeti intorno al sole, o quello della luna intorno alla terra, come un processo di "caduta" governato dalle stesse leggi e soggetto all'azione dello stesso tipo di forza che si ha nel caso della caduta di una pietra lasciata andare dalla nostra mano, richiede una prodigiosa immaginazione. I pianeti o la luna in realtà non precipitano verso i corpi centrali da cui sono attratti; ciò è dovuto alla legge d'inerzia, che qui si manifesta attraverso la presenza di una forza centrifuga. Ci occuperemo di nuovo di ciò più avanti.

Newton sperimentò la validità della sua idea di *gravitazione universale* nel caso della luna, di cui, da misure dirette, si conosceva la distanza dalla terra. Questa prova riveste un'importanza determinante; ne riporteremo qui il semplicissimo calcolo per sottolineare il fatto che le teorie scientifiche si possono ritenere valide e consistenti soltanto quando sono in accordo con i risultati sperimentali.

Ora la terra occupa la posizione di corpo centrale, mentre la luna si comporta da pianeta. Designiamo con r il raggio dell'orbita della luna, e con T il suo periodo di rivoluzione. Sia poi R il raggio terrestre. Se la forza gravitazionale sulla terra è tale da avere la stessa origine di quella che la terra esercita sulla luna, allora, per la legge di Newton [20], l'accelerazione g dovuta alla gravità assume la forma

$$g = \frac{4\pi^2 C}{R^2}$$

dove C ha lo stesso valore che ha per la luna, e cioè, dalla [19]:

$$C = r^3/T^2.$$

Sostituendo questo valore nella formula precedente, si ottiene

$$g = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 R^2}. \quad [22]$$

Ora il periodo di rivoluzione "sidereo" della luna, cioè il tempo che intercorre fra due posizioni in cui la congiungente terra-luna ha la stessa direzione rispetto alle stelle fisse, è:

$$\begin{aligned} T &= 27 \text{ giorni } 7 \text{ ore } 43 \text{ minuti } 12 \text{ secondi} \\ &= 2\,360\,592 \text{ secondi.} \end{aligned}$$

In fisica si è soliti scrivere soltanto le cifre significative di un numero che esprime il valore di una certa grandezza, giudicate in rapporto ai calcoli in cui la grandezza verrà usata. Così scriviamo:

$$T = 2,36 \times 10^6 \text{ s.}$$

La distanza della luna dal centro della terra è circa 60 volte il raggio terrestre, o, più esattamente:

$$r = 60,1R.$$

È facile ricordare il raggio della terra, perché è legato in modo semplice al sistema metrico. Infatti si ha $1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1$ decimilionesimo del quadrante terrestre, cioè la quarantamilionesima (4×10^7) parte della circonferenza della terra, $2\pi R$, quindi:

$$100 \text{ cm} = 2\pi R/4 \times 10^7 \quad \text{oppure} \quad R = 6,37 \times 10^8 \text{ cm.} \quad [23]$$

Sostituendo questi valori nella [22] otteniamo

$$g = \frac{4\pi^2 \times 60,1^3 \times 6,37 \times 10^8}{2,36^2 \times 10^{12}} = 981 \text{ cm/s}^2. \quad [24]$$

Questo valore è in perfetto accordo con quello trovato in base a osservazioni compiute sulla terra col pendolo (vedi p. 62).

La grande importanza di questo risultato risiede nel fatto che esso esprime la *relativizzazione della forza peso*. Per gli antichi il peso rappresentava l'attrazione, subita da tutti i corpi terrestri, verso "il basso", inteso in senso assoluto. La scoperta della sfericità della terra condusse alla relativizzazione della direzione del

peso, che fu perciò riguardato come un'attrazione diretta verso il centro della terra.

Ora è dimostrata l'identità fra il peso e la forza d'attrazione che mantiene la luna nella sua orbita, e poiché non può esserci alcun dubbio che quest'ultima sia della stessa natura della forza che mantiene la terra e gli altri pianeti nelle loro orbite intorno al sole, si arriva in questo modo all'idea che i corpi non sono semplicemente "pesanti", ma sono *pesanti l'uno rispetto all'altro*. La terra, essendo un pianeta, è attratta dal sole, ma a sua volta essa attrae la luna. La descrizione che ora abbiamo dato è ovviamente approssimativa in quanto in realtà il sole, la luna e la terra si attraggono reciprocamente. Se si considera l'orbita della terra intorno al sole, si può certamente ritenere con buona approssimazione che il sole sia in quiete, perché la sua enorme massa impedisce che entrino in gioco accelerazioni apprezzabili; d'altro canto si può trascurare l'influenza della luna, a causa della sua piccola massa. In ogni modo, una teoria esatta dovrà tener conto di tutte queste influenze, chiamate "perturbazioni".

Prima di considerare più da vicino questo aspetto, che rappresenta il principale progresso a cui portò la teoria di Newton, esprimeremo la legge di Newton nella sua forma definitiva. Abbiamo visto che un pianeta posto alla distanza r dal sole è soggetto all'attrazione [21]:

$$F = m(4\pi^2 C/r^2),$$

dove C è una costante che dipende soltanto dalle proprietà del sole, e non da quelle del pianeta. Ora, in base alla relativizzazione del concetto di peso, anche il sole deve essere attratto similmente dal pianeta. Dette M la massa del sole e c una costante dipendente soltanto dalla natura del pianeta, la forza esercitata dal pianeta sul sole è data da

$$F' = M(4\pi^2 c/r^2).$$

Ma in precedenza, nell'introdurre il concetto di forza (p. 29),

abbiamo usato il principio secondo cui la reazione è uguale alla azione, che è una delle più semplici e più comprovate leggi della meccanica. Se ora applichiamo questo principio al nostro caso, dobbiamo porre $F=F'$, oppure:

$$m(4\pi^2 C/r^2) = M(4\pi^2 c/r^2).$$

Segue da ciò che

$$mC = Mc,$$

da cui si trae

$$C/M = c/m.$$

Questo rapporto è perciò lo stesso per entrambi i corpi (sole e pianeti), e quindi anche per un qualsiasi altro corpo. Se indichiamo con $k/4\pi^2$ il rapporto in questione, possiamo scrivere:

$$4\pi^2 C = kM, \quad 4\pi^2 c = km. \quad [25]$$

Il fattore di proporzionalità k è detto *costante di gravitazione*.

La legge della gravitazione universale di Newton assume allora la forma simmetrica

$$F = k \frac{mM}{r^2}, \quad [26]$$

e si può enunciare come segue: *due corpi si attraggono reciprocamente con una forza che è proporzionale alla massa di ognuno ed è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.*

4. La meccanica celeste

È soltanto in questa forma generale che la legge di Newton denota un reale progresso nella descrizione delle orbite dei pianeti. Infatti originariamente essa fu dedotta utilizzando un procedimento di calcolo basato sulle leggi di Keplero, e non rappresentò altro che un brevissimo e notevole compendio di queste leggi.

Si può anche dimostrare la legge inversa, secondo cui il moto di un corpo intorno a un corpo centrale in quiete dal quale è attratto, è necessariamente un'ellisse di Kepler. (Questo è vero nel caso di un'orbita periodica chiusa. Tuttavia certe comete hanno orbite iperboliche, che non sono chiuse.) Un fatto nuovo si verifica soltanto nel caso in cui, in primo luogo, entrambi i corpi sono considerati in moto, e, in secondo luogo, altri corpi vengono aggiunti al problema. Abbiamo a che fare allora con un *problema di tre o più corpi*, che corrisponde esattamente alle effettive condizioni del sistema planetario (fig. 34). Non sono infatti soltanto i pianeti e i satelliti a

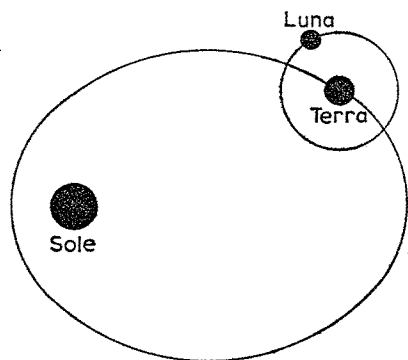


Fig. 34. Problema di tre corpi: sole, terra, luna.

essere attratti rispettivamente dal sole e dai relativi pianeti, ma ogni corpo, sia esso stella, pianeta, satellite o cometa, esercita un'attrazione su tutti gli altri corpi. Di conseguenza, le ellissi di Kepler risultano essere solo delle approssimazioni, che sono accettabili solo perché l'azione esercitata dal sole, a causa della sua grande massa, prevale di gran lunga sull'azione reciproca di tutti gli altri corpi del sistema planetario. Ma in lunghi intervalli di tempo queste azioni reciproche si manifestano come deviazioni dalle leggi di Kepler; parliamo allora, come è già stato osservato, di "perturbazioni".

Ai tempi di Newton tali perturbazioni erano già note. Nei secoli successivi l'avvenuto perfezionamento dei metodi di osservazione permise l'accumularsi di un grandissimo numero di risultati sperimentali, che la teoria di Newton riuscì a interpretare con successo. Ciò costituisce una delle più grandi vittorie del pensiero umano.

Non intendiamo, in questa sede, seguire lo sviluppo della meccanica da Newton ai nostri giorni, e descrivere i metodi matematici ideati per calcolare le orbite "perturbate". Alla elaborazione della "teoria delle perturbazioni" hanno contribuito i più abili matematici di diversi paesi e, sebbene per il problema dei tre corpi non sia ancora stata trovata una soluzione rigorosa, si possono tuttavia determinare i moti con grande precisione, per un tempo, passato o futuro, di centinaia, di migliaia o di milioni di anni. La teoria di Newton è stata verificata per innumerevoli altre osservazioni, sempre con successo, tranne che in un caso, di cui parleremo fra poco. L'astronomia teorica fondata da Newton, fu perciò considerata per molto tempo come un modello per le scienze esatte. Essa permise di soddisfare quel che era stato il desiderio dell'umanità fin dai tempi più antichi; sollevò il velo che era steso sul futuro, ed elargì ai suoi cultori il dono della profezia. Anche se le predizioni astronomiche riguardavano eventi che erano non importanti, oppure in differenti per la vita umana, esse tuttavia divennero il simbolo della liberazione dello spirito dai vincoli terrestri. Come gli uomini dei tempi più antichi, rivolgiamo riverenti lo sguardo alle stelle, che ci hanno permesso di conoscere la legge dell'universo.

Ma la legge che governa l'universo non deve dar luogo ad alcuna eccezione. Esiste un caso, come abbiamo già ricordato, in cui la teoria di Newton cade in difetto. Per quanto piccolo possa essere, non possiamo negare la presenza di un errore; esso si riscontra nel caso del pianeta Mercurio, il più vicino al sole. L'orbita di un pianeta può essere considerata come un moto ellittico di Kepler perturbato dalla presenza degli altri pianeti; in altri termini la posizione del piano orbitale, la posizione dell'asse maggiore e l'eccentricità dell'ellisse (in breve, tutti gli "elementi dell'orbita") sono

soggetti a variazioni graduali. I valori di queste grandezze, calcolati in base alla legge di Newton, sono in accordo con i risultati delle osservazioni per tutti i pianeti, tranne che per Mercurio. In questo caso la rotazione del perielio (fig. 35) mostra l'esistenza di una piccolissima ma ben definita deviazione dal valore calcolato partendo dalla legge di Newton: 43 secondi d'arco ogni cento anni. Questa deviazione, perfettamente determinata, fu calcolata la prima volta con un procedimento perturbativo dall'astronomo Le Verrier (1845),

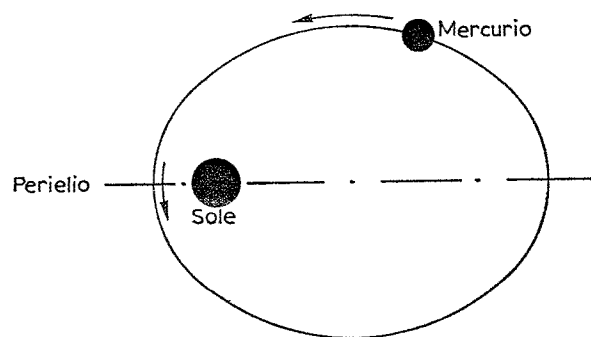


Fig. 35. Il perielio è il punto dell'orbita ellittica che è più vicino al sole. Il perielio di Mercurio mostra una piccola rotazione intorno al sole, che non può essere spiegata in base alla meccanica di Newton.

lo stesso che predisse l'esistenza del pianeta Nettuno da calcoli basati sulle perturbazioni. Tuttavia l'attrazione newtoniana dei pianeti a noi noti non è in grado di spiegarla. Si fece ricorso allora a delle masse ipotetiche alla cui attrazione doveva essere attribuito il moto del perielio di Mercurio. Così, ad esempio, la luce zodiacale, che si suppone provenga da una distribuzione di materia rarefatta nelle vicinanze del sole, fu messa in relazione con l'anomalia presentata da Mercurio. Ma questa ipotesi, e le numerose altre che furono avanzate sull'argomento, risentono tutte del difetto di essere state inventate *ad hoc*, e di non aver avuto alcuna conferma sperimentale.

Il fatto che la sola deviazione, definitivamente accertata, dalla

legge di Newton si verifichi nel caso di Mercurio, il pianeta più vicino al sole, indica dopo tutto che la legge contiene qualche difetto fondamentale. Se si assume infatti, com'è plausibile, che le deviazioni dalla legge di Newton aumentino allo stesso modo o più rapidamente della stessa forza, queste dovranno essere maggiori nelle vicinanze del sole. Furono proposte delle modifiche, da apportare alle leggi, inventate però del tutto arbitrariamente, senza poter essere verificate; la possibilità, che esse hanno, di interpretare il moto del perielio di Mercurio, non prova che siano corrette. Se è effettivamente necessario perfezionare la teoria di Newton, si deve richiedere che il miglioramento derivi da un principio che presenti il vantaggio, sulla teoria esistente, di essere più generale ed essenzialmente più probabile, senza dover ricorrere all'introduzione di fattori arbitrari.

Einstein fu il primo a riuscire in questo intento. Nell'ultimo capitolo torneremo sull'interpretazione, che egli diede, del moto del perielio di Mercurio.

5. Il principio di relatività della meccanica classica

Nel discutere i grandi problemi dell'universo, abbiamo quasi dimenticato il nostro punto di partenza, la terra. Le leggi della dinamica, scoperte sulla base di esperienze terrestri, furono estese allo spazio astronomico, in cui la terra percorre a grande velocità la sua orbita intorno al sole. Perché, allora, noi ci rendiamo conto così poco di questo viaggio attraverso lo spazio? Come mai Galileo riuscì a trovare sulla terra in moto leggi che, secondo Newton, dovevano essere rigorosamente valide soltanto nello spazio supposto in quiete assoluta? Abbiamo richiamato l'attenzione su questo problema già nel menzionare le idee di Newton sullo spazio e il tempo. Costatammo allora che il percorso apparentemente rettilineo di una sfera che rotola su un tavolo dovrebbe in realtà essere leggermente incurvato, a causa della rotazione della terra, poiché il percorso è rettilineo non rispetto alla terra in moto, ma rispetto allo spazio assoluto. Il fatto che noi non osserviamo questa curvatura è dovuto

sia alla brevità del percorso che a quella del tempo di osservazione durante il quale la terra ha compiuto soltanto una piccola rotazione. Anche ammettendo ciò, dobbiamo tener conto ancora del moto di rivoluzione intorno al sole, che avviene con l'enorme velocità di 30 km/s. Perché non osserviamo niente di tutto ciò?

Anche questo moto di rivoluzione, in realtà, è una rotazione, e nei moti di corpi sulla terra dovrebbe essere osservabile allo stesso modo della rotazione della terra intorno al proprio asse, anche se in modo molto meno sensibile, a causa della piccola curvatura dell'orbita terrestre. Ma nel nostro problema non vogliamo intendere il moto rotatorio, bensì il moto in avanti, che, nel corso di un giorno, è praticamente rettilineo e uniforme.

In effetti, tutti gli eventi meccanici sulla terra avvengono come se questo tremendo moto in avanti non esistesse; questa legge ha una validità del tutto generale, qualunque sia il sistema di corpi in moto rettilineo e uniforme nello spazio assoluto di Newton, ed è chiamata *principio di relatività della meccanica classica*. Questo principio può essere formulato in diversi modi; per ora lo enunceremo come segue: *rispetto a un sistema di coordinate in moto rettilineo e uniforme nello spazio assoluto, le leggi della meccanica hanno esattamente la stessa espressione che assumono quando sono riferite a un sistema di coordinate in quiete nello spazio*.

Per assicurarci della validità di questa legge, basta soltanto aver ben chiara in mente la legge fondamentale della meccanica: la legge delle forze impulsive, e i concetti che questa implica. Sappiamo che un urto produce una *variazione* di velocità. Ma tale variazione è del tutto indipendente dalla circostanza che le velocità prima e dopo l'urto, v_1 e v_2 , siano riferite allo spazio assoluto oppure a un sistema in moto con velocità costante u . Se il corpo, prima dell'urto, fosse in moto nello spazio con velocità $v_1=5$ cm/s, allora un osservatore che si muova nella stessa direzione con velocità $u=2$ cm/s, misurerebbe soltanto la velocità relativa $v'_1 = v_1 - u = 5 - 2 = 3$ cm/s. Se ora il corpo subisce un urto nella direzione del moto, tale da aumentare la sua velocità a $v_2=7$ cm/s, allora l'osservatore in moto misu-

rerà la velocità finale $v'_2 = v_2 - u = 7 - 2 = 5$ cm/s. La variazione di velocità prodotta dall'urto è perciò $w = v_2 - v_1 = 7 - 5 = 2$ cm/s, nello spazio assoluto. D'altra parte l'osservatore in moto nota un aumento di velocità dato da

$$w' = v'_2 - v'_1 = (v_2 - u) - (v_1 - u) = v_2 - v_1 = w = 5 - 3 = 2 \text{ cm/s};$$

entrambe hanno quindi lo stesso valore.

Nel caso di forze continue, e delle accelerazioni che esse producono, vale esattamente la stessa cosa. Infatti l'accelerazione a è stata definita come il rapporto tra la variazione di velocità w e il tempo impiegato a compiere tale variazione; poiché w è indipendente da qualsiasi moto in avanti rettilineo e uniforme (moto traslatorio) del sistema di riferimento usato nella misurazione, lo stesso si può dire per a .

Questa legge ha chiaramente origine nella legge d'inerzia, secondo cui, in assenza di forze, si ha un moto di traslazione. Perciò un sistema di corpi, tutti in moto nello spazio con la stessa velocità costante, non soltanto è in quiete per quanto riguarda la posizione reciproca dei corpi, ma è tale che su essi non agiscono nemmeno forze che si manifestino come conseguenza del moto. Ma se i corpi del sistema esercitassero forze l'uno sull'altro, i moti da esse causati sarebbero moti relativi, che avverrebbero proprio come se il moto di traslazione comune non avesse luogo. Quindi per un osservatore in moto col sistema, esso non potrebbe essere distinto da un sistema in quiete.

L'esperienza, ripetuta quotidianamente e migliaia di volte, in base alla quale non osserviamo niente del moto traslatorio della terra, costituisce una prova notevole di questa legge. Ma lo stesso fatto è visto nei moti che si verificano sulla terra. Infatti quando un moto del genere è rettilineo e uniforme rispetto alla terra, esso è tale anche rispetto allo spazio, se si trascura la rotazione nel moto della terra. Tutti sappiamo che in una nave o in una carrozza ferroviaria che si muova uniformemente, gli eventi meccanici avvengono nello stesso modo che sulla terra (considerata in quiete). Si supponga, ad esempio,

che su una nave in moto una pietra cada verticalmente: essa cade lungo una verticale che è in moto con la nave. Se il moto della nave fosse perfettamente uniforme e senza scosse di alcun genere, i passeggeri non si renderebbero conto del moto, proprio come accade per il moto apparente degli oggetti circostanti.

6. I limiti del concetto di spazio assoluto

La legge della relatività dei fenomeni della meccanica rappresenta il punto di partenza di tutti gli argomenti che svolgeremo in seguito. La sua importanza deriva dal fatto che essa è intimamente legata all'idea di spazio assoluto di Newton, di cui, fin dall'inizio, limita essenzialmente il reale contenuto fisico.

Abbiamo giustificato l'introduzione dei concetti di spazio e di tempo assoluti, basandoci sull'affermazione che senza tale ipotesi la legge d'inerzia sarebbe priva di significato. Dobbiamo ora affrontare il problema di stabilire fino a che punto a questi concetti si possa assegnare l'attributo di "realtà", nel senso in cui esso viene usato in fisica. Un concetto è inerente alla realtà fisica, soltanto quando è possibile rilevare, mediante l'osservazione sperimentale, l'esistenza di qualche fenomeno a cui esso corrisponda. Non è questa la sede adatta per entrare nel merito di una discussione sul concetto filosofico di realtà; ciò nonostante, possiamo almeno esser certi che il criterio di realtà che ora abbiamo dato corrisponde pienamente al modo in cui il termine "realtà" viene usato nelle scienze fisiche. Quei concetti che non soddisfano tale criterio sono stati gradualmente eliminati dalla struttura della fisica.

Come segue dal principio di relatività, è immediato riconoscere che una "posizione fissa" nello spazio assoluto di Newton non ha alcuna realtà fisica, conformemente a quanto abbiamo ora stabilito. Se giungessimo ad affermare che un ben definito sistema di riferimento si trova in quiete nello spazio assoluto, conseguentemente potremmo a ugual diritto considerare in quiete anche un sistema di riferimento che, rispetto ad esso, fosse in moto rettilineo e uni-

forme. Gli eventi della meccanica hanno lo stesso comportamento in entrambi i sistemi, e fra questi nessuno è privilegiato nei confronti dell'altro. Un determinato corpo, che in uno dei due sistemi risulti in quiete, descrive un moto rettilineo e uniforme rispetto all'altro. Se qualcuno afferma che tale corpo segna una posizione nello spazio assoluto, qualcun altro, a ugual diritto, può asserire la stessa cosa, e dichiarare che il corpo è in moto.

Lo spazio assoluto di Newton perde così una parte considerevole della sua esistenza soprannaturale. Uno spazio in cui non c'è nessun luogo che possa essere rilevato per mezzo di un qualsiasi strumento fisico, è in ogni caso un'idea vaga e astratta, e non semplicemente una scatola in cui sono collocati gli oggetti materiali.

Ora dobbiamo anche cambiare la terminologia che avevamo usato nell'enunciare il principio di relatività, poiché parlavamo ancora di un sistema di coordinate in quiete nello spazio assoluto, e ciò è chiaramente privo di significato fisico. Per arrivare a una formulazione definita di tale principio, introduciamo il concetto di *sistema inerziale*, che designa un sistema di coordinate in cui la legge d'inerzia è valida nella sua forma originaria. Non esiste soltanto un unico sistema in quiete come nello spazio assoluto di Newton, ma ci sono infiniti altri sistemi, tutti ugualmente permessi, e poiché non è molto appropriato parlare di numerosi "spazi" che si muovono l'uno rispetto all'altro, preferiamo per quanto è possibile evitare l'uso del vocabolo "spazio". Il principio di relatività assume allora la seguente forma: *esistono infiniti sistemi equivalenti, i sistemi inerziali, che descrivono un moto traslatorio (rettilineo e uniforme) l'uno rispetto all'altro, e in cui le leggi della meccanica sono valide nella loro semplice forma classica.*

Si vede qui chiaramente come il problema dello spazio sia intimamente legato alla meccanica. Non è lo spazio a imprimere la sua forma alle cose, ma sono le cose e le loro leggi fisiche a determinare lo spazio. Vedremo più avanti come questa idea guadagnerà sempre più terreno fino a raggiungere il suo vertice nella teoria della relatività generale di Einstein.

7. Le trasformazioni di Galileo

Per quanto le leggi della meccanica siano le stesse in tutti i sistemi inerziali, da ciò non segue naturalmente che le coordinate e le velocità dei corpi rispetto a due sistemi inerziali siano uguali. Un corpo che si trovi, per esempio, in quiete in un sistema S , possiede, in un altro sistema S' in moto rispetto a S , una velocità costante. Le leggi generali della meccanica contengono soltanto le accelerazioni, e queste, come abbiamo visto, sono le stesse per tutti i sistemi inerziali. Ciò non è vero per le coordinate e le velocità.

Si pone quindi il problema di trovare la posizione e la velocità di un corpo in un dato sistema inerziale S' , una volta che queste siano note per un altro sistema inerziale S .

Si tratta di passare da un certo sistema di coordinate a un altro sistema in moto rispetto al primo. A questo punto è opportuno fare alcune osservazioni di carattere generale sui sistemi di coordinate equivalenti (cioè tutti ugualmente accettabili) e sulle leggi, le cosiddette *equazioni di trasformazione*, che ci permettono di passare matematicamente da un sistema all'altro.

In geometria, i sistemi di coordinate costituiscono un mezzo per fissare opportunamente le posizioni relative di un corpo rispetto a un altro. A questo fine, se supponiamo che il sistema di coordinate sia solidale a uno dei corpi, allora le coordinate dei punti dell'altro corpo determinano completamente la posizione relativa. Naturalmente la scelta delle coordinate è del tutto arbitraria, e queste possono essere rettangolari, oblique, polari, o ancora più generali. Anche l'orientazione rispetto al primo corpo è arbitraria; tuttavia o questa rimane la stessa, oppure cambia: in quest'ultimo caso bisogna specificare in che modo avviene la variazione della posizione del sistema di coordinate rispetto al corpo. Se, per esempio, si adotta un sistema di coordinate rettangolari nel piano, allora in luogo del sistema S che abbiamo assunto prima possiamo sceglierne un secondo, S' , che rispetto a S abbia subito uno spostamento (fig. 36)

o una rotazione (fig. 37). Dobbiamo però specificare esattamente di quanto il sistema si è spostato o è ruotato. In base a quanto abbiamo stabilito, siamo ora in grado di determinare, nel nuovo sistema S' , le coordinate di un punto P i cui valori erano x e y nel vecchio sistema S . Se indichiamo le nuove coordinate con x' , y' ,

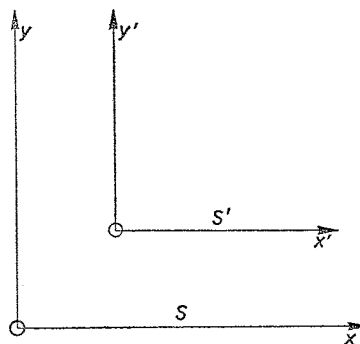


Fig. 36. Due sistemi di riferimento, S ed S' , spostati l'uno rispetto all'altro.

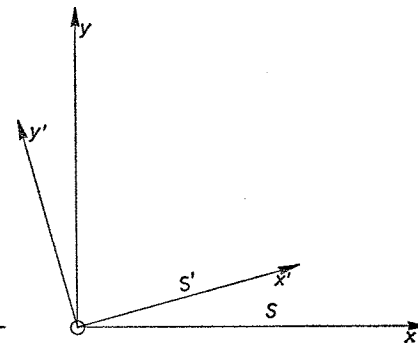


Fig. 37. Due sistemi di riferimento, S ed S' , ruotati l'uno rispetto all'altro.

otteniamo delle formule che ci permettono di calcolare x' e y' una volta note x e y . A tale scopo ci poniamo nel caso più semplice, in quello cioè in cui il sistema S' è ottenuto facendo subire a S una traslazione di lunghezza d nella direzione dell'asse x (fig. 38). È chiaro allora che la nuova coordinata x' di un punto P sarà uguale alla corrispondente coordinata x , che esso aveva nel vecchio sistema di riferimento, diminuita dello spostamento d , mentre la coordinata y resta invariata; si ha cioè

$$x' = x - d, \quad y' = y. \quad [27]$$

Nel caso di altri sistemi di riferimento valgono formule di trasformazione analoghe, ma più complicate, che discuteremo più particolarmente in seguito. È importante osservare che si possono tro-

vare delle quantità la cui espressione non cambia al variare del sistema di riferimento che si considera. Tali quantità sono dette *invarianti* rispetto alla trasformazione di coordinate che collega i due sistemi di riferimento. Se consideriamo, ad esempio, la trasformazione [27], che rappresenta una traslazione lungo l'asse x , si ha ovviamente che la differenza Δ fra le coordinate x di due punti P e Q non cambia; infatti (fig. 39):

$$\Delta = x_2' - x_1' = (x_2 - d) - (x_1 - d) = x_2 - x_1.$$

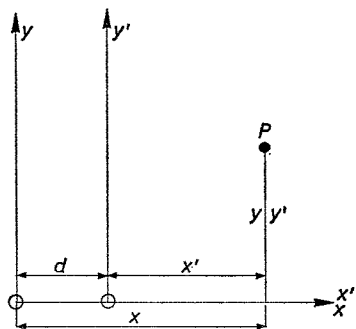


Fig. 38. S' è traslato di un tratto d nella direzione dell'asse x . Il punto P ha coordinate x, y in S , e $x' = x - d, y' = y$ in S' .

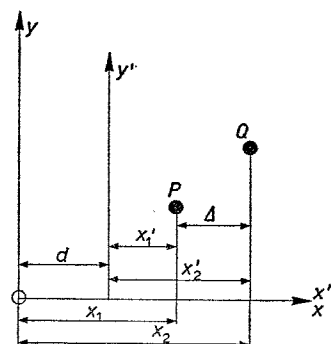


Fig. 39. L'espressione della distanza Δ fra P e Q , misurata lungo l'asse x , è uguale in entrambi i sistemi: $\Delta = x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$.

Se i due sistemi di coordinate S ed S' sono inclinati l'uno rispetto all'altro, allora la distanza s fra i due punti P e Q è un invariante (fig. 40), cioè ha la stessa espressione in entrambi i sistemi, come si vede applicando il teorema di Pitagora:

$$s^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad [28]$$

Nel caso più generale in cui il sistema di coordinate subisca contemporaneamente sia una traslazione sia una rotazione, la distanza PQ dei due punti resta ancora invariata. Gli invarianti rivestono una par-

ticolare importanza, in quanto rappresentano delle relazioni geometriche che non dipendono dalla scelta, arbitraria, del sistema di coordinate. Come vedremo, essi svolgeranno in seguito un ruolo fondamentale.

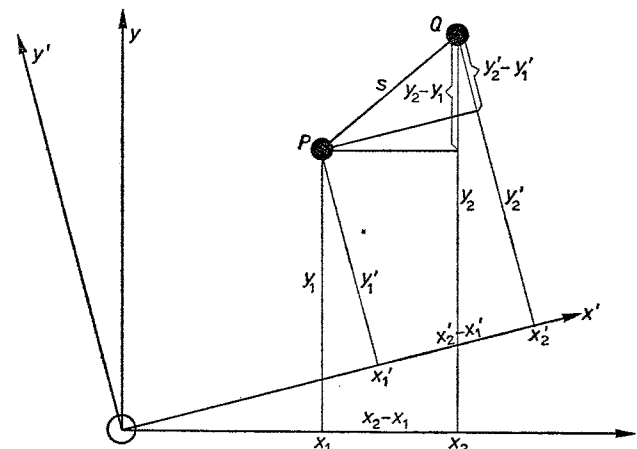


Fig. 40. L'espressione della distanza s fra i punti P e Q è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento: $s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Dopo questa digressione geometrica, ritorniamo ora al nostro punto di partenza; dobbiamo cercare di rispondere alla domanda: quali sono le leggi di trasformazione che ci permettono di passare da un sistema inerziale all'altro?

Per sistema inerziale intendiamo un sistema di coordinate in cui è valida la legge d'inerzia. In questa definizione ha importanza soltanto lo stato di moto del sistema; vale a dire, il fatto che esso non abbia alcuna accelerazione rispetto allo spazio assoluto. Viceversa, la natura e la posizione del sistema non sono essenziali: possiamo scegliere un sistema di coordinate rettangolari, come si fa di solito; siamo completamente liberi anche di fissarne la posizione. Possiamo adottare un sistema che abbia subito una traslazione o una rotazione; quel che importa, è che esso abbia lo stesso stato di moto.

Abbiamo già adoperato il termine *sistema di riferimento* tutte le volte che abbiamo parlato di stato di moto di un sistema di coordinate (e non della sua natura e della sua posizione), e d'ora in poi useremo questa espressione sistematicamente.

Immaginiamo ora un sistema inerziale, S' che descriva, rispetto a S , un moto rettilineo con velocità v ; in entrambi i sistemi di riferimento possiamo scegliere coordinate rettangolari, e supporre che la direzione del moto coincida rispettivamente con quella degli assi x e x' . Possiamo assumere inoltre che all'istante $t=0$ i due sistemi abbiano la stessa origine. Allora al tempo t l'origine del sistema S' avrà subito uno spostamento $d=vt$ nella direzione dell'asse x : perciò in questo istante i due sistemi si trovano esattamente nella stessa posizione che precedentemente avevamo considerato da un punto di vista puramente geometrico. Valgono quindi le equazioni [27], in cui ora si deve porre $d=vt$. Si ottengono di conseguenza le equazioni di trasformazione:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad [29]$$

dove abbiamo aggiunto le coordinate y e z , che restano invariate. Questa legge viene chiamata *trasformazione di Galileo*, in onore del fondatore della meccanica.

Possiamo anche enunciare il *principio di relatività* nel modo seguente: *le leggi della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo*.

Ciò è dovuto al fatto che le accelerazioni sono invarianti, come abbiamo già visto nel considerare la variazione di velocità di un corpo in moto rispetto a due sistemi inerziali.

Prima abbiamo fatto vedere che la teoria del moto, o cinematica, può essere riguardata come una geometria nello spazio a quattro dimensioni x, y, z, t (l' "universo" di Minkowski). È interessante stabilire quale significato assumono i sistemi inerziali e le trasformazioni di Galileo in tale geometria quadridimensionale. Ciò non è affatto difficile, in quanto le coordinate y e z non entrano affatto nella trasformazione; è sufficiente quindi operare nel piano x, t .

Supponiamo che il nostro sistema inerziale S sia rappresentato da un sistema di coordinate rettangolari x, t (fig. 41), e che un secondo sistema inerziale, S' , corrisponda al sistema di coordinate x', y' .

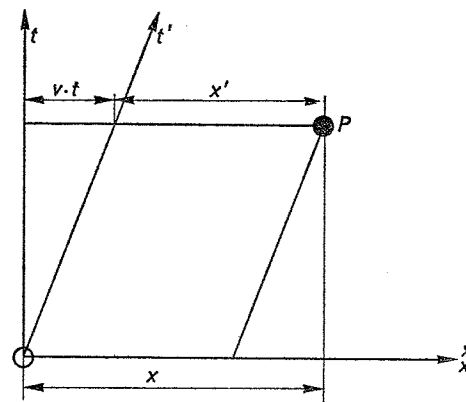


Fig. 41. Diagramma x, t relativo a una trasformazione di Galileo.

Ci si pone il problema: quale posizione assume il secondo sistema rispetto al primo, e che relazione intercorre fra i due? Anzitutto, la misura del tempo è esattamente la stessa in entrambi i sistemi; è data cioè dal tempo assoluto $t=t'$. Quindi l'asse x , su cui $t=0$, coincide con l'asse $x', t'=0$. Di conseguenza il sistema S' potrà essere soltanto un sistema di coordinate oblique. L'asse t' è la linea d'universo del punto $x'=0$, vale a dire dell'origine del sistema S' . L'ascissa x di questo punto che si muove con velocità v rispetto a S , è al tempo t uguale a vt , in tale sistema. Il grafico ci dà allora la formula della trasformazione di Galileo $x' = x - vt$ per ogni punto d'universo P .

Ad ogni sistema inerziale corrisponde un sistema di coordinate oblique x, t con lo stesso asse x , ma in cui l'asse t ha un'inclinazione diversa. Il sistema di coordinate rettangolari da cui siamo partiti non occupa, fra questi sistemi obliqui, alcuna posizione privilegiata.

L'unità di tempo è segnata, su ogni asse t dei diversi sistemi di coordinate, dalla stessa parallela all'asse x .

Possiamo riassumere il risultato di cui sopra nel seguente enunciato: *nel piano xt la scelta della direzione dell'asse t è completamente arbitraria; in ogni sistema di coordinate x, t avente lo stesso asse x , sono valide le leggi fondamentali della dinamica.*

Dal punto di vista geometrico questa varietà di sistemi di coordinate equivalenti è estremamente singolare e inconsueta. È da notare in particolare la posizione fissa o l'invarianza dell'asse x . Quando, in geometria, operiamo con coordinate oblique, non c'è di solito nessuna ragione di mantenere fissa la posizione di un asse. Ma ciò è richiesto dalla proprietà fondamentale del tempo assoluto di Newton. Tutti gli eventi che avvengono simultaneamente, cioè per lo stesso valore di t , sono rappresentati da una parallela all'asse x , poiché, secondo Newton, il tempo scorre "in modo assoluto e indipendentemente da ogni oggetto esterno".

Vedremo in seguito che questo comportamento asimmetrico delle coordinate d'universo x e t , qui ricordato soltanto come una imperfezione di natura matematica, è in realtà inesistente; Einstein è riuscito ad eliminarlo, relativizzando il concetto di tempo.

8. Le forze inerziali

Dopo aver constatato che le singole posizioni nello spazio assoluto di Newton non hanno alcuna realtà fisica, dobbiamo chiederci che cosa resta alla fine di questo concetto. Resta questo: la resistenza presentata da tutti i corpi alle accelerazioni deve essere interpretata come dovuta all'azione dello spazio assoluto, nel senso dato da Newton. La locomotiva, nel mettere in moto un treno, deve vincere la resistenza inerziale. Il proiettile che demolisce un muro trae la sua capacità distruttiva dall'inerzia. Le azioni inerziali hanno luogo in presenza di accelerazioni, le quali non sono altro che variazioni di velocità nello spazio assoluto; quest'ultima espressione è giustificata dal fatto che una variazione di velocità ha lo stesso

valore in tutti i sistemi inerziali. I sistemi di riferimento accelerati rispetto a sistemi inerziali, *non* sono equivalenti né a questi ultimi, né fra di loro. Naturalmente le leggi della meccanica potrebbero anche essere riferite a tali sistemi, ma esse assumerebbero allora forma nuova e più complicata. In un sistema accelerato, anche la traiettoria di un corpo abbandonato a sé stesso non è più uniforme e rettilinea (vedi p. 76). Possiamo esprimere questa circostanza, affermando che in un sistema accelerato oltre alle forze vere agiscono delle *forze apparenti*, le *forze inerziali*. Un corpo su cui non agisca nessuna forza vera, è soggetto tuttavia a queste forze inerziali, e il suo moto non è perciò in generale né uniforme né rettilineo. Quando si mette in moto o si arresta un veicolo, si ha un esempio di sistema accelerato del genere. È ben nota la scossa che si ha all'atto della partenza o dell'arresto di un treno; questa non è altro che la forza inerziale di cui abbiamo parlato.

Analizzeremo ora in particolare gli effetti di cui sopra nel caso di un sistema S che descrive un moto rettilineo accelerato, del quale indichiamo con a' l'accelerazione. Se ora a denota l'accelerazione di un corpo misurata rispetto a tale sistema S in moto, l'accelerazione rispetto allo spazio assoluto sarà allora data, ovviamente, da $a + a'$. Pertanto la legge fondamentale della dinamica rispetto allo spazio assoluto si scrive:

$$m(a + a') = F$$

da cui si ottiene

$$ma = F - ma'$$

Possiamo quindi dire che nel sistema accelerato S è ancora valida una legge del moto di tipo newtoniano, cioè

$$ma = F',$$

dove ora la forza F' assume la forma

$$F' = F - ma'$$

in cui F è la forza vera, e $-ma'$ quella apparente o inerziale.

Ora, in assenza di forze vere, vale a dire quando $F=0$, la forza totale diventa uguale alla forza d'inerzia:

$$F' = -ma' . \quad [30]$$

Questa forza agirà pertanto su un corpo abbandonato a sé stesso; possiamo illustrarne l'azione in base alle considerazioni seguenti. Sappiamo che la gravitazione terrestre, cioè la forza di gravità, è determinata dalla formula $G=mg$, dove g è l'accelerazione costante dovuta alla gravità. La forza di inerzia $F' = -ma'$ si comporta perciò esattamente allo stesso modo del peso, o forza di gravità; il segno meno sta a indicare che essa è diretta in senso opposto al moto del sistema di riferimento S usato come base. L'accelerazione gravitazionale apparente, a' , è uguale a quella del sistema di riferimento S ; quindi il moto di un corpo abbandonato a sé stesso nel sistema S è del tutto simile a quello dovuto alla caduta o al lancio di un grave.

La relazione che intercorre tra le forze inerziali che compaiono nei sistemi accelerati e la forza di gravità, appare qui ancora del tutto fortuita; in realtà, rimase inosservata per duecento anni, ma si può asserire che anche in questo stadio essa forma la base della teoria della relatività generale di Einstein.

9. Le forze centrifughe e lo spazio assoluto

Nella concezione di Newton, il fatto che nei sistemi accelerati compaiano forze inerziali costituisce una prova a favore dell'esistenza dello spazio assoluto, o, meglio, della posizione privilegiata assunta dai sistemi inerziali. Le forze inerziali si possono mettere particolarmente in evidenza nei sistemi di riferimento in rotazione, sotto forma di forze centrifughe. È su queste forze che Newton si basò principalmente nella elaborazione della sua teoria dello spazio assoluto. Riportiamo qui le sue parole più significative:

Gli effetti per i quali i moti assoluti e relativi si distinguono gli uni dagli altri, sono le forze di allontanamento dall'asse del moto circolare. Infatti nel moto

circolare puramente relativo queste forze sono nulle, mentre nel moto vero e assoluto sono maggiori o minori, a seconda della quantità di moto. Si sospenda un secchio a un filo abbastanza lungo, e si agisca con moto circolare continuo fino a che il filo, a causa della torsione, s'indurisca completamente. Si riempi il secchio di acqua e lo si faccia riposare insieme con l'acqua; lo si muova, poi, con la forza subitanea, in senso contrario, lungo un cerchio; allora, allentandosi il filo, continuerà lungo questo moto. All'inizio la superficie dell'acqua sarà piana, come prima del moto del vaso; e poiché il secchio, comunicata gradualmente la forza all'acqua, fa in modo che anche questa inizi più sensibilmente a ruotare, l'acqua comincerà a ritirarsi a poco a poco dal centro e salirà verso i lati formando una figura concava (come io stesso ho sperimentato)...

All'inizio, quando il moto relativo dell'acqua era massimo, quello stesso moto in nessun modo eccitava lo sforzo di allontanamento dall'asse; l'acqua non tendeva alla circonferenza con l'ascendere verso i lati del vaso, ma rimaneva piana, e perciò non era ancora cominciato il suo vero moto circolare. Dopo, diminuito il movimento relativo dell'acqua, la sua ascesa lungo le pareti indicava lo sforzo di allontanamento dall'asse del moto, e questo sforzo indicava che il suo vero moto circolare cresceva continuamente fino al punto massimo in cui l'acqua giaceva in quiete relativa...

È difficilissimo in verità conoscere i veri moti dei singoli corpi e distinguerli di fatto dagli apparenti: e ciò perché le parti dello spazio immobile, in cui i corpi veramente si muovono, non cadono sotto i sensi. La cosa tuttavia non è affatto disperata. Gli argomenti, infatti, possono essere desunti in parte dai moti apparenti, che sono le differenze dei moti veri, in parte dalle forze, che sono cause ed effetti dei moti veri. Cosicché, se due globi, legati da un filo a una determinata distanza l'uno dall'altro, vengono fatti ruotare intorno al comune centro di gravità, si conoscerà, dalla tensione del filo, lo sforzo di allontanamento dei globi dall'asse del loro movimento, e di conseguenza si potrà calcolare la quantità del movimento circolare... In questo modo potrebbe venir trovata la quantità e la determinazione di questo moto circolare in qualunque vuoto immenso, ove non esiste alcunché di esterno e sensibile con cui i globi potrebbero essere confrontati...*

Queste parole esprimono molto chiaramente quale sia il significato dello spazio assoluto; dobbiamo aggiungere soltanto poche righe di spiegazione.

Possiamo, innanzitutto, cercare di stabilire delle relazioni quanti-

* Newton, *op. cit.*

tative per le forze centrifughe; basta, a questo scopo, richiamare le proprietà dell'accelerazione nei moti circolari. Questa era diretta verso il centro, e, in base alla [4], era data da $a=v^2/r$, dove r denota il raggio della circonferenza e v la velocità.

Se ora consideriamo un sistema di riferimento S in rotazione (di periodo T), la velocità di un punto situato alla distanza r dall'asse (vedi formula [18]) è data da

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

e quindi l'accelerazione, che indichiamo con a' , rispetto all'asse assume il valore

$$a' = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

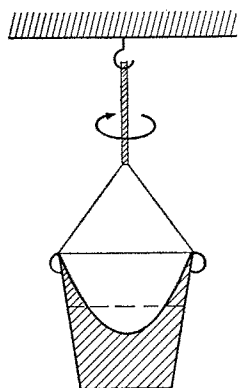


Fig. 42. Esperimento del secchio di Newton. Le forze centrifughe spingono il liquido verso la parete del recipiente.

Ora, se un corpo ha accelerazione a rispetto a S , la sua accelerazione assoluta è data da $a+a'$. Proprio come avveniva nel caso del moto rettilineo accelerato, di cui abbiamo parlato in precedenza,

anche qui si ottiene una forza apparente, di valore assoluto

$$ma' = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad [31]$$

e che è diretta dall'asse verso l'esterno: è la *forza centrifuga*.

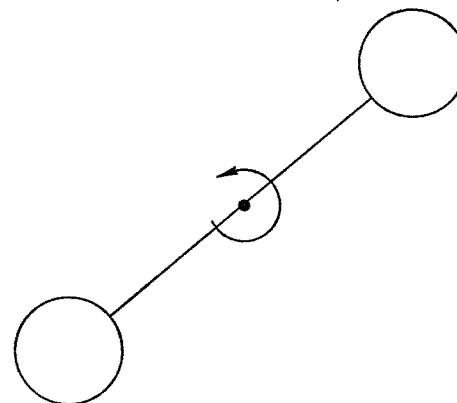


Fig. 43. Rotazione di due masse connesse da un filo. La tensione del filo mette in evidenza le forze centrifughe (o l'esistenza di una "rotazione nello spazio assoluto").

Com'è noto, la forza centrifuga interviene anche nella dimostrazione della rotazione della terra (fig. 44). A causa di tali forze, le masse tendono ad allontanarsi dall'asse di rotazione, e come conseguenza di ciò si verifica lo schiacciamento della terra ai poli e la diminuzione della gravità procedendo dai poli verso l'equatore. Abbiamo incontrato quest'ultimo effetto (senza aver cura, allora, di analizzarne la causa) nel considerare la scelta dell'unità di forza (p. 74); secondo Newton esso costituisce una prova della rotazione della terra. La forza centrifuga è diretta verso l'esterno, si

oppone quindi all'azione della gravitazione, e ha l'effetto di ridurre il peso. All'equatore la diminuzione dell'accelerazione g dovuta alla gravità è data da $4\pi^2 R/T^2$, dove R è il raggio terrestre. Assumendo $R=6,37 \times 10^8$ cm (vedi [23]) e $T=1$ giorno $= 24 \times 60 \times 60$ s $= 86400$ s, come differenza fra l'accelerazione di gravità ai poli e quella corrispondente all'equatore, si ottiene il valore di $3,37$ cm/s²,

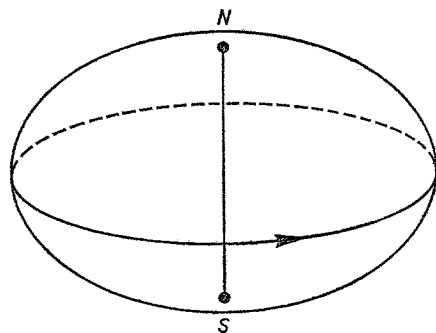


Fig. 44. Rappresentazione schematica dello schiacciamento della terra causato dalle forze centrifughe dovute alla sua rotazione.

che è relativamente piccolo in confronto a 981 cm/s². Esso deve essere leggermente aumentato a causa dello schiacciamento della terra.

Secondo la teoria dello spazio assoluto di Newton, questi fenomeni devono essere considerati non come dovuti al moto relativo ad altre masse, come ad esempio le stelle fisse, ma come derivanti dalla rotazione assoluta nello spazio vuoto. Se la terra fosse in quiete, e se, al contrario, l'intero sistema stellare eseguisse una rotazione in senso opposto intorno all'asse terrestre in ventiquattr'ore, allora, secondo Newton, le forze centrifughe non potrebbero comparire. La terra non sarebbe schiacciata e la forza gravitazionale avrebbe lo stesso valore sia ai poli che all'equatore. Il moto dei corpi celesti, osservato dalla terra, sarebbe esattamente lo stesso

in entrambi i casi. Tuttavia, in qualche modo, si dovrebbe poter distinguere un caso dall'altro.

Possiamo mettere in evidenza questa differenza mediante l'esperimento del pendolo di Foucault (1850). In base alle leggi della dinamica newtoniana, il piano di oscillazione di un pendolo non subisce spostamenti nello spazio assoluto, in assenza di forze di deviazione. Supponiamo di sospendere il pendolo in corrispondenza del Polo Nord; la terra ruota, per così dire, sotto di esso (fig. 45 a, b), e per-

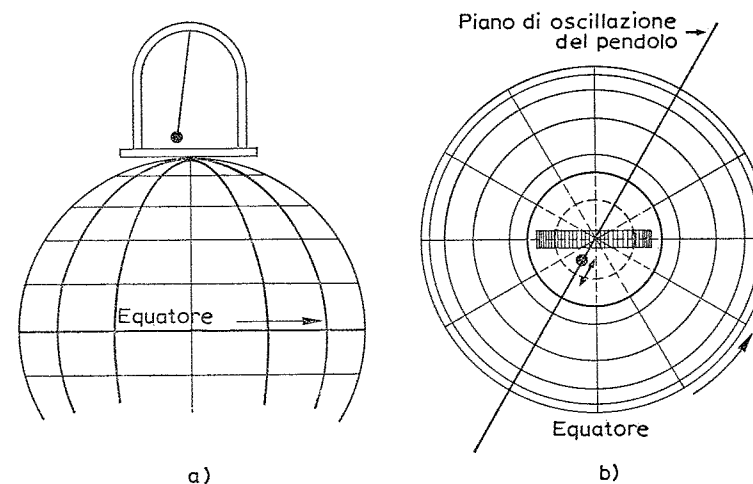


Fig. 45. Pendolo di Foucault nel Polo Nord. La direzione del moto resta invariata durante la rotazione della terra.

tanto un osservatore terrestre vedrebbe ruotare il piano di oscillazione in senso contrario. Se la terra fosse ferma, e il sistema stellare in rotazione, secondo Newton la posizione del piano di oscillazione non dovrebbe cambiare rispetto alla terra. In realtà si verifica che essa cambia, e ciò prova di nuovo la rotazione *assoluta* della terra.

Consideriamo ora come ulteriore esempio il moto della luna

attorno alla terra (fig. 46). Secondo Newton la luna, se non fosse soggetta a una rotazione assoluta attorno alla terra, precipiterebbe su quest'ultima. Immaginiamo di avere un sistema di coordinate piane x, y con origine nel centro della terra, contenente l'orbita lunare e tale che l'asse x attraversi sempre la luna. Se tale sistema

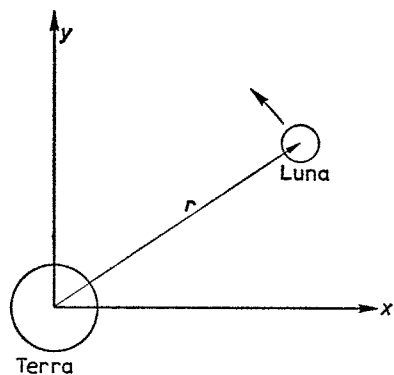


Fig. 46. Le forze gravitazionali esercitate dalla terra sulla luna sono equilibrate esattamente dalle forze centrifughe dovute al moto della luna intorno alla terra.

fosse in quiete assoluta, la luna allora sarebbe soggetta soltanto all'azione della forza di gravità, diretta verso il centro della terra, che in base alla [26] di pagina 87 vale

$$F = k \frac{Mm}{r^2}$$

e cadrebbe quindi sulla terra lungo l'asse x . Ma non accade nulla di simile, e ciò dimostra apparentemente la rotazione assoluta del sistema di coordinate x, y . Questa rotazione dà luogo infatti a una forza centrifuga che fa equilibrio alla forza F ; si può così scrivere:

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Questa formula, naturalmente, non è altro che la terza legge di

Keplero. Se infatti in entrambi i membri si elimina la massa m della luna e si esprime v in funzione del periodo di rivoluzione T , cioè $v = 2\pi r/T$, si ottiene:

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{kM}{r^2}$$

o, per la [25] di pagina 87,

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{kM}{4\pi^2} = C.$$

A un risultato analogo si giunge ovviamente applicando le stesse considerazioni al caso della rotazione dei pianeti intorno al sole.

Da questi e da molti altri esempi si trae che la teoria dello spazio assoluto di Newton è basata su fatti molto concreti. Dall'esame degli argomenti trattati, possiamo dedurre quanto segue.

L'esempio del secchio d'acqua in rotazione mostra che le forze centrifughe non sono da attribuire alla rotazione relativa dell'acqua rispetto al secchio. La causa potrebbe essere dovuta alla presenza nelle vicinanze di masse più grandi, ad esempio la stessa massa terrestre. Lo schiacciamento della terra, la diminuzione della gravità all'equatore, l'esperimento del pendolo di Foucault mostrano che la causa dev'essere ricercata fuori dell'ambito terrestre. Inoltre le orbite dei satelliti e dei pianeti sono dovute soltanto alla forza centrifuga che è in equilibrio con la forza di gravità. Gli stessi fenomeni si osservano infine nel caso delle più lontane stelle doppie, dalle quali la luce impiega migliaia d'anni per giungere fino a noi. Sembra pertanto che l'esistenza delle forze centrifughe sia un fenomeno universale, e non possa essere dovuta a processi di interazione. Non ci resta altro, quindi, che attribuirne la causa allo spazio assoluto.

Tali ragionamenti sono stati comuni e considerati sempre validi fin dal tempo di Newton, e soltanto pochi pensatori vi si opposero; fra questi, fu principalmente Ernst Mach a contestarne la validità. Nella sua impostazione critica della meccanica, egli analizzò i con-

cetti di Newton e ne esaminò i fondamenti logici. Partì dall'idea che gli esperimenti della meccanica non avrebbero mai potuto fornirci alcuna informazione intorno allo spazio assoluto. Si possono conoscere soltanto posizioni e moti relativi, e quindi soltanto questi presentano una realtà fisica. Le dimostrazioni di Newton sull'esistenza dello spazio assoluto dovevano essere perciò illusorie. In realtà, tutto dipende dall'aver accettato l'ipotesi che non ci sarebbe alcuno schiacciamento ai poli e nessuna diminuzione di gravità all'equatore se l'intero sistema stellare ruotasse intorno alla terra. Mach afferma giustamente che tali asserzioni sono al di là di ogni possibile verifica sperimentale. Egli muove a Newton il rimprovero di non essersi attenuto al suo principio di considerare validi soltanto quei fatti che potevano essere accertati sperimentalmente. Lo stesso Mach cercò di liberare la meccanica da questo difetto; egli era del parere che le forze inerziali dovevano essere interpretate come azioni della massa di tutto l'universo, e delineò lo schema di un sistema dinamico in cui intervenivano soltanto quantità relative. Ma questo tentativo non avrebbe potuto aver successo. In primo luogo gli sfuggì l'importanza della relazione che lega l'inerzia alla gravitazione, la quale è espressa dalla proporzionalità fra il peso e la massa. In secondo luogo, egli non era al corrente della teoria relativistica dei fenomeni ottici ed elettromagnetici, che eliminava il preconcetto in favore dello spazio assoluto. Per costruire la nuova meccanica era necessario basarsi su questi due fatti, la cui scoperta costituì il risultato a cui pervenne Einstein.

4.

*Le leggi fondamentali dell'ottica*1. *L'etere*

La meccanica, sia dal punto di vista storico che da quello logico, è il primo fondamento di tutta la fisica, anche se non ne rappresenta che una piccola parte. Per risolvere il problema delle connessioni fra spazio e tempo, ci siamo serviti finora soltanto di osservazioni e di teorie appartenenti all'ambito della meccanica; ci proponiamo di vedere adesso cosa possano insegnarci su tale problema le altre parti della fisica.

Il problema dello spazio interessa innanzi tutto i campi d'indagine dell'ottica, dell'elettricità e del magnetismo; ciò è dovuto al fatto che la luce e le forze elettriche e magnetiche si propagano attraverso il vuoto. Un recipiente dal quale sia stata pompata l'aria, anche fino a un vuoto spinto, è assolutamente trasparente alla luce e in esso si propagano anche le forze elettriche e magnetiche. La luce del sole e delle stelle per esempio giunge fino a noi dopo aver attraversato lo spazio vuoto.

La scoperta che alcuni eventi fisici si propagano attraverso lo spazio astronomico suggerì molto tempo fa l'ipotesi che lo spazio non fosse vuoto, ma riempito di una sostanza estremamente fine e senza peso, l'etere, mezzo capace di propagare tali fenomeni. Qualunque sia il significato che ancor oggi si può attribuire a questo concetto di etere, esso è solo un modo per specificare certi stati fisici o "campi" dello spazio vuoto. Se però fin dal principio fondassimo la nostra trattazione su questa idea di campo, gran parte dei problemi storicamente connessi con l'etere rimarrebbero senza

spiegazione. In origine, infatti, si pensava che l'etere fosse una sostanza reale, non solo dotata di stati fisici ma anche capace di moto.

Descriveremo prima lo sviluppo dei principi dell'ottica e in seguito dell'elettrodinamica; in questo modo dovremo abbandonare il problema dello spazio e del tempo, ma avremo la possibilità di affrontarlo in seguito con una visione più completa di conoscenze empiriche e leggi teoriche.

2. La teoria corpuscolare e la teoria ondulatoria

Hæc quoniam fiunt, tenuis quoque debet imago
Ab rebus mitti, summo de corpore earum ...
Ergo ...
... effigias quoque debent mittere tenues
Res quæque; ex summo quoniam jaculantur utræque:
Sunt igitur jam formarum vestigia certa,
Quæ volgo volitant, subtili prædita filo,
Nec singillatim possunt secreta videri.*

Citiamo questi versi dal poema di Lucrezio *De rerum natura* (libro IV), vera guida poetica alla filosofia epicurea scritta nel primo secolo a. C. Essi contengono una specie di teoria corpuscolare della luce, elaborata dalla potente fantasia del poeta e sviluppata nello stesso tempo con vero spirito scientifico. Tuttavia non possiamo pensare che questi versi costituiscano una dottrina scientifica più di altre antiche speculazioni sulla natura della luce. Manca ad essi il tentativo di definire quantitativamente i fenomeni, che è la caratteristica prima di un lavoro oggettivo. D'altra parte, è par-

* [Questi esempi sono sufficienti a convincerci che dalla superficie si liberano le immagini delle cose, e tutte le cose emettono le loro delicate effigi perché queste specie di immagini hanno la loro sorgente sulla superficie dei corpi. Abbiamo quindi rivelato l'esistenza di simulacri, che percorrono lo spazio aereo con forme così delicate che se ce ne allontaniamo sfuggono ai nostri occhi.]

ticolarmente difficile dissociare la sensazione soggettiva della luce dal fenomeno fisico e renderlo quindi misurabile.

Possiamo stabilire l'inizio della scienza dell'ottica al tempo di Descartes. La sua *Dioptrique* (1638) contiene le leggi fondamentali della propagazione della luce: le leggi della riflessione e della rifrazione, la prima già nota agli antichi e la seconda scoperta sperimentalmente poco tempo prima da Snell (all'incirca nel 1618). Fu Descartes a sviluppare il concetto di un mezzo capace di propagare la luce, l'etere, anticipando in un certo senso la *teoria ondulatoria*; questa teoria, di cui vi è già cenno nell'opera di Robert Hooke (1667), fu chiaramente formulata da Christiaan Huygens nel 1678. Si ritiene generalmente che Newton, loro grande contemporaneo, per quanto un po' più giovane, sia stato l'iniziatore della dottrina opposta, la *teoria corpuscolare*. Prima di discutere la disputa fra queste due teorie cercheremo di spiegarne per grandi linee il significato.

La *teoria corpuscolare* afferma che ogni corpo luminoso emette piccole particelle, il cui moto avviene secondo le leggi della meccanica, che colpendo l'occhio producono la sensazione di luce. La *teoria ondulatoria*, o *teoria delle onde*, stabilisce d'altro lato una analogia fra la propagazione della luce e il moto di un'onda sulla superficie dell'acqua o quello delle onde sonore nell'aria. Da ciò la necessità di ammettere l'esistenza di un mezzo elastico in cui ogni corpo trasparente sia immerso: *l'etere luminoso*. Le singole particelle di questa sostanza si limitano a oscillare attorno alle loro posizioni di equilibrio, e quindi ciò che varia durante la propagazione dell'onda di luce, è lo *stato di moto* del sistema, non la posizione delle particelle stesse. Questo processo è illustrato nella figura 47 per una serie di punti che possono vibrare in direzione verticale: ogni linea orizzontale del diagramma corrisponde a un istante di tempo (ad esempio $t=0, 1, 2 \dots s$). Ciascun punto esegue una vibrazione in direzione verticale, e il moto globale che così risulta ha l'aspetto di un'onda che avanza verso destra, istante per istante.

Vi è però una significativa obiezione alla teoria ondulatoria. È noto cioè che mentre un'onda che si propaga sulla superficie

dell'acqua, oppure un'onda sonora, aggira gli ostacoli che incontra nel suo moto, un raggio di luce si propaga in linea retta; sappiamo infatti che se nel suo percorso interponiamo un corpo opaco tagliato a spigolo vivo, otteniamo un'ombra dai contorni nitidi.

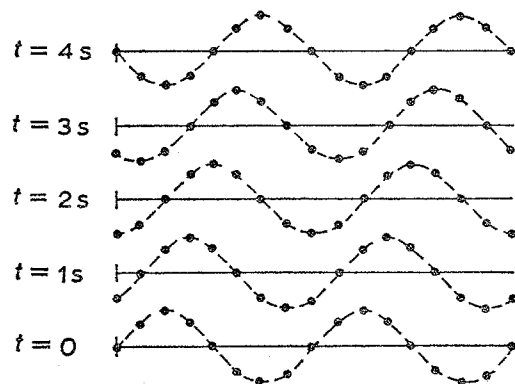


Fig. 47. Un'onda che si propaga verso destra.

Questo fatto spinse Newton a respingere la teoria ondulatoria. Egli non si pronunciò in favore di una ipotesi ben definita, limitandosi ad affermare che la luce viene emessa da un corpo luminoso "come se si trattasse di emissione di particelle". I suoi successori tuttavia interpretarono la sua opinione come un'affermazione in favore della teoria corpuscolare e, per l'autorità del suo nome, questa teoria fu accettata per un intero secolo. Già in quel tempo però Grimaldi aveva scoperto che la luce può "curvarsi" in corrispondenza di un angolo (il risultato fu pubblicato postumo nel 1665): osservando infatti i bordi nitidi di un'ombra si può notare una debole illuminazione, che assume la forma di frange luminose e oscure alternate. Si tratta del noto fenomeno della *diffrazione* della luce. Fu appunto questa scoperta che fece di Huygens un convinto sostenitore della teoria ondulatoria. Egli ritenne che il principale argomento in suo favore fosse il fatto che due raggi di luce che si incon-

trano in un punto, non interferiscono fra loro, proprio come nel caso di due treni d'onda che si propagano sulla superficie dell'acqua. Fra due fasci di particelle invece, si avrebbero sicuramente delle collisioni o comunque dei fenomeni di interazione. Sulla base della teoria ondulatoria, Huygens riuscì a spiegare la riflessione e la rifrazione della luce, servendosi del principio, oggi noto sotto il suo nome, che ogni punto raggiunto da un'onda luminosa diventa sorgente di nuove onde sferiche. Ciò dà luogo a una differenza fondamentale tra le teorie corpuscolare e ondulatoria, differenza che in seguito portò a una conclusiva decisione sperimentale in favore della seconda.

È noto che se un raggio di luce incontra una superficie piana di separazione tra l'aria e una sostanza più densa, come vetro oppure acqua, subisce una rifrazione, cioè prosegue oltre la superficie in direzione più inclinata (fig. 48). La teoria corpuscolare spiega questo

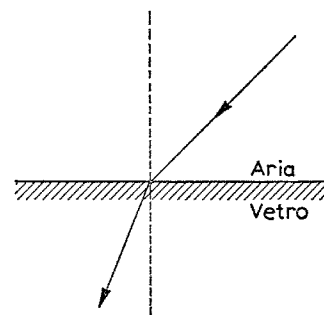


Fig. 48. Un raggio di luce cambia la sua direzione nel passaggio dall'aria al vetro.

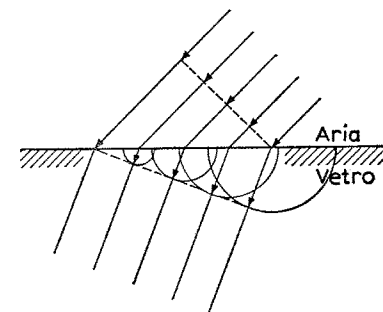


Fig. 49. Rifrazione di un raggio di luce al passaggio dall'aria al vetro spiegata mediante la teoria ondulatoria.

fatto supponendo che i corpuscoli di luce subiscano un'attrazione da parte del mezzo più denso nel momento in cui vi penetrano. In tal modo essi vengono accelerati sotto l'azione di un impulso perpendicolare alla superficie di separazione e quindi deviati verso

la normale. Ne consegue che la loro velocità è maggiore in un mezzo più denso che in uno meno denso. La costruzione di Huygens basata sulla teoria ondulatoria, parte da presupposti esattamente contrari (fig. 49). Quando un'onda luminosa colpisce una superficie di separazione, genera in ogni punto della superficie un'onda elementare; se queste si propagano più lentamente nel secondo mezzo, che è il più denso, l'involuppo di tutte le onde sferiche, che rappresenta l'onda rifratta secondo la teoria di Huygens, è deviato verso destra.

Huygens interpretò i fenomeni di *birifrangenza* dello spato di Islanda, scoperti nel 1669 da Erasmus Bartholin, sempre in base alla teoria ondulatoria; egli suppose che la luce potesse propagarsi nel cristallo con due diverse velocità, di modo che un'onda elementare avesse la forma di una sfera, l'altra di un ellissoide. La birifrangenza consiste essenzialmente nella proprietà che ha, ad esempio, un cristallo di calcite di scindere in due un raggio luminoso che lo attraversi. Huygens scoprì che questi due raggi differivano fra loro e anche dalla luce naturale. Ciò può essere messo in evidenza con l'aiuto di un secondo cristallo: se un raggio proveniente dal primo incide perpendicolarmente sul secondo, escono due raggi che hanno un'intensità variabile per le rotazioni del secondo cristallo attorno alla direzione del raggio incidente. Vi sono anzi particolari posizioni in cui l'intensità di un raggio può essere nulla (in tal caso non vi è più birifrangenza). I due raggi emessi per birifrangenza mostrano quindi precise proprietà di anisotropia, che non si osservano con la luce naturale. Newton fece notare (1717) che non tutte le direzioni sono equivalenti per un raggio di luce e interpretò questa circostanza come una prova contro la teoria ondulatoria. In quel tempo infatti si conoscevano soltanto onde di compressione e rarefazione (sul tipo delle onde sonore), in cui ogni particella oscilla "longitu-

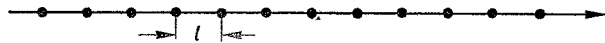


Fig. 50. Insieme di masse puntiformi in equilibrio a distanza l fra loro.

dinalmente" nella direzione di propagazione dell'onda (figg. 50 e 51). In questo caso non vi è chiaramente alcuna ragione perché la direzione perpendicolare alla propagazione sia in qualche modo privilegiata.

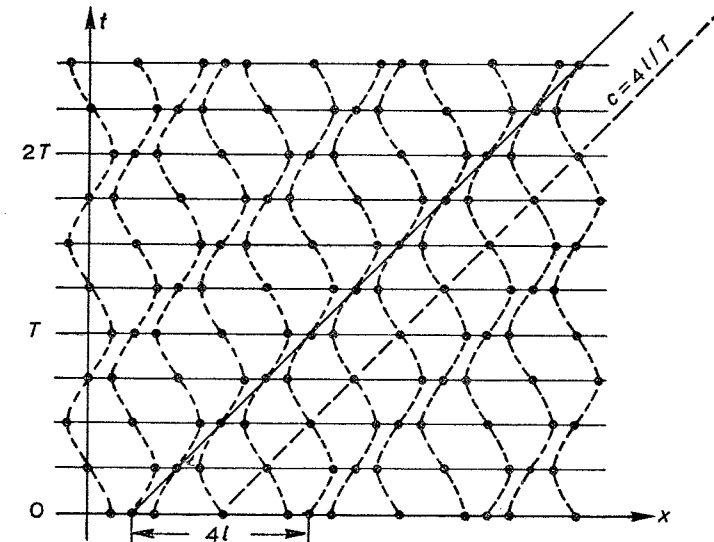


Fig. 51. Moto ondulatorio longitudinale dell'insieme della figura 50. Ogni punto esegue un moto periodico di periodo T attorno alla sua posizione di equilibrio. Vi è uno sfasamento nel tempo fra le oscillazioni dei vari punti. Lo stato dell'insieme, per esempio un massimo (—) e un minimo (---) di densità, si muove verso destra con velocità $c = 4l/T$.

3. La velocità della luce

La determinazione della *velocità della luce*, che è la proprietà più importante della luce e quella che sarà il nucleo delle nostre considerazioni seguenti, fu eseguita indipendentemente dalla controversia fra le due ipotesi sulla natura stessa della luce. Il fatto che dovesse trattarsi di una velocità elevatissima fu chiaro fin dalle prime osservazioni sulla propagazione luminosa. Galileo tentò (1607)

di eseguirne una misura servendosi dei raggi emessi da una lanterna, ma senza successo, perché la luce percorre in tempi troppo brevi le distanze accessibili sulla terra. Per questa misura è quindi necessario ricorrere alle enormi distanze esistenti fra i corpi celesti nello spazio.

Olaf Römer (1676) fu il primo a calcolare la velocità della luce c in base a osservazioni astronomiche, studiando le eclissi dei satelliti di Giove. Nella figura 52 è rappresentato appunto ciò che avviene

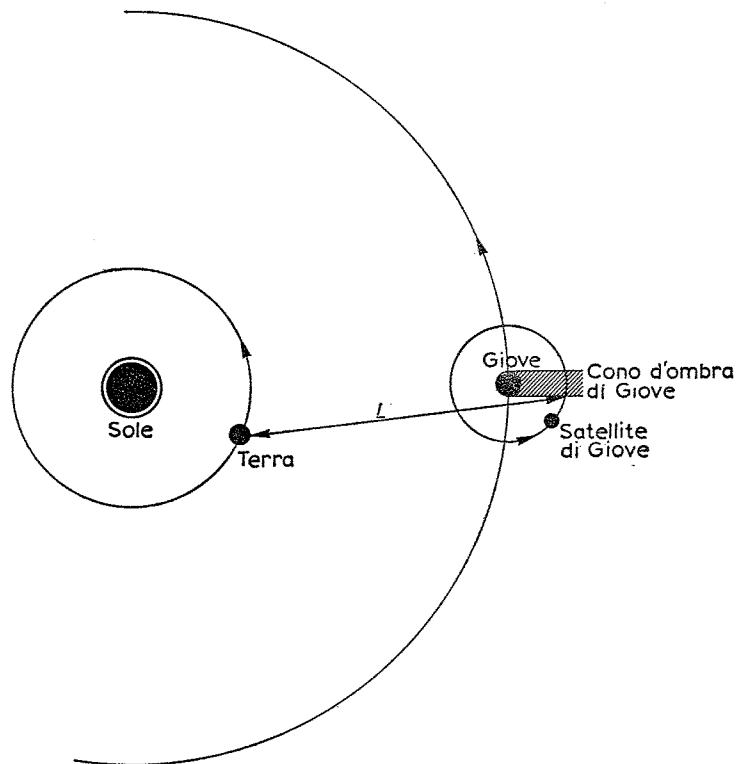


Fig. 52. L è la distanza fra la terra e il punto in cui il satellite di Giove entra nel cono d'ombra. Poiché la luce viaggia con velocità c , l'eclisse è osservata sulla terra con un ritardo di tempo L/c rispetto a un osservatore posto sul satellite di Giove.

durante un'eclisse. L'eclisse si verifica tutte le volte che il satellite entra nel cono d'ombra di Giove; visto da Giove, ciò avviene a intervalli uguali al tempo di rivoluzione τ del satellite. Se L è la distanza fra Giove e la Terra, questi segnali arrivano sulla Terra con un ritardo di tempo pari a L/c , e se l è la variazione di L durante il tempo di rivoluzione τ , l'osservatore terrestre vede l'eclisse in un intervallo lentamente variabile $\tau + l/c$.

I tempi di rivoluzione osservati sulla Terra sono perciò più lunghi o più brevi dei tempi reali che si osserverebbero su Giove, secondo che la distanza L aumenti o diminuisca. L'intervallo di tempo entro cui si osservano sulla Terra n rivoluzioni è

$$t_n = n\tau + l_n/c,$$

dove l_n è la variazione totale di L durante questo tempo.

Le due quantità incognite τ e c possono essere ricavate con appropriate osservazioni. Anzitutto si può misurare τ contando il numero N di eclissi che avvengono durante l'intervallo t_N in cui la distanza L fra Giove e la Terra assume valori uguali; se trascuriamo il moto di Giove, poiché la sua velocità è relativamente piccola, t_N sarà circa un anno, cioè il periodo di rivoluzione della Terra nel suo moto orbitale. In tal caso $l_N = 0$ e $\tau = t_N/N$ (dove t_N è circa un anno).

Contando poi il numero N' di eclissi che si hanno in un periodo di sei mesi, a partire dalla posizione di minima distanza fra la Terra e Giove, $l_{N'}$ sarà il diametro dell'orbita terrestre ($\sim 3 \times 10^8$ km), e quindi $t_{N'} = N'\tau + l_{N'}/c$ cioè

$$c = \frac{l_{N'}}{t_{N'} - N'\tau}.$$

Per il tempo di ritardo $t_{N'} - N'\tau$ si è trovato un valore di 17 minuti ~ 1000 secondi; allora $c = 3 \times 10^8 \text{ km} / 1000 \text{ s} = 300\,000 \text{ km/s}$.

Il valore esatto, cui Römer si era avvicinato con estrema precisione, è

$$c = 299\,793 \text{ km/s}. \quad [32]$$

James Bradley scoprì (1727) un altro effetto legato alla circostanza che la velocità della luce è finita: il moto apparente di una stella fissa nel periodo di un anno, evidentemente dovuto alla rotazione della terra attorno al sole. Per comprendere l'origine di questo fenomeno ci serviremo dell'interpretazione molto semplice fornita dalla teoria corpuscolare, avvertendo però che proprio in questo caso la teoria ondulatoria va incontro ad alcune difficoltà, sulle quali dovremo spesso tornare in seguito. Sappiamo che un moto rettilineo e uniforme in un sistema di riferimento S è tale in qualsiasi sistema S' in moto traslatorio rispetto ad S ; il modulo e la direzione della velocità sono però diversi nei due sistemi. È per questo che un fascio di corpuscoli luminosi provenienti da una stella fissa, viene osservato dalla terra secondo una direzione differente. Studieremo in particolare questa deflessione o *aberrazione* nel caso in cui la luce giunga in direzione perpendicolare al moto della terra (fig. 53). Se ammettiamo che la stella non sia ferma (nel qual caso il telescopio dovrebbe essere orientato direttamente sulla stella, fig. 53 a), ma si muova ad esempio con velocità v verso destra, è chiaro che non è possibile vedere la stella mantenendo il telescopio nella posizione della figura 53 a; in tal caso infatti il corpuscolo luminoso, dopo avere attraversato l'obiettivo, non raggiungerebbe l'oculare, ma la montatura del telescopio. Per poter osservare la stella il telescopio deve quindi essere inclinato (fig. 53 b), e supponiamo che si trovi nella posizione 1 quando il corpuscolo luminoso colpisce il suo obiettivo.

Ne segue che, mentre il corpuscolo percorre la lunghezza l del telescopio in un tempo l/c , la terra e il telescopio solidale ad essa si muovono di un tratto $v \times l/c$ fino alla posizione 2. Il corpuscolo luminoso colpisce l'oculare solo se $v \times l/c$ è uguale allo spostamento d del telescopio. Abbiamo quindi

$$d/l = v/c.$$

L'inclinazione del telescopio è determinata dal rapporto v/c , e il

telescopio non dev'essere orientato sulla posizione reale della stella ma su un punto del cielo spostato nella direzione della velocità v .

Indicheremo con β il rapporto v/c , detto anche *costante di aberrazione*.

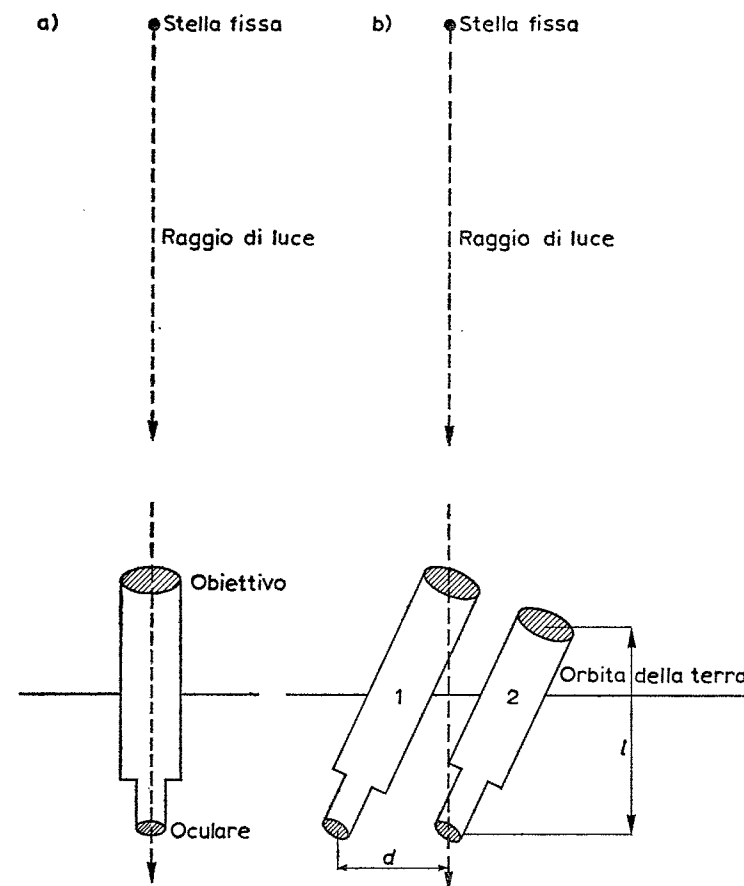


Fig. 53. a) Osservazione di una stella fissa dalla terra, supposta ferma.

b) Osservazione di una stella fissa dalla terra in moto. Il telescopio dev'essere inclinato in modo tale che la luce proveniente dalla stella attraversi sia l'obiettivo sia l'oculare.

razione:

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad [33]$$

Il suo valore numerico è molto piccolo, poiché la velocità della terra nella sua orbita attorno al sole è circa $v=30$ km/s, mentre, come abbiamo già visto, la velocità della luce è 300 000 km/s. Quindi β è dell'ordine di $1/10\,000$.

Le posizioni apparenti di ogni stella fissa sono sempre leggermente spostate nella direzione del moto della terra e quindi, durante l'annuale rivoluzione della terra attorno al sole, ognuna descrive una piccola orbita ellittica. Dalla misura delle dimensioni di questa ellisse è possibile ricavare il rapporto β e da esso, poiché la velocità v della terra nella sua orbita è nota da misure astronomiche, si può ottenere la velocità della luce c . Il risultato che così si ottiene è in ottimo accordo con la misura di Römer.

Anticipiamo ora il corso storico degli eventi e riferiamo in breve com'è possibile eseguire una misurazione terrestre della velocità della luce. Il problema consiste essenzialmente nell'inventare un dispositivo che consenta di misurare con precisione il brevissimo intervallo di tempo necessario alla luce per percorrere distanze terrestri dell'ordine di pochi chilometri o solo di alcuni metri. Fizeau (1849) e Foucault (1865) si servirono di due metodi differenti per eseguire questa misurazione e confermarono il valore numerico di c già trovato con metodi astronomici. Senza discutere qui i particolari del procedimento, ci limiteremo a sottolinearne un aspetto: in ambedue i metodi il raggio di luce va dalla sorgente a uno specchio S , qui viene riflesso e ritorna al punto di partenza (fig. 54), percorrendo così lo stesso percorso due volte. In questo modo ciò che si misura, durante il moto avanti e indietro, non è altro che la velocità media. Per alcune considerazioni che faremo in seguito ci interessa ora osservare che, supposto che la velocità della luce non sia la stessa nelle due direzioni a causa del moto della terra (vedi più avanti p. 161), questo effetto sarà interamente o parzialmente eliminato per un moto

che avvenga nei due sensi. Se inoltre teniamo conto del fatto che la velocità della terra è estremamente più piccola di quella della luce, potremo sempre pensare di trascurare il moto terrestre.

Queste misure furono ripetute in seguito con strumenti perfezionati, raggiungendo un considerevole grado di accuratezza; oggi

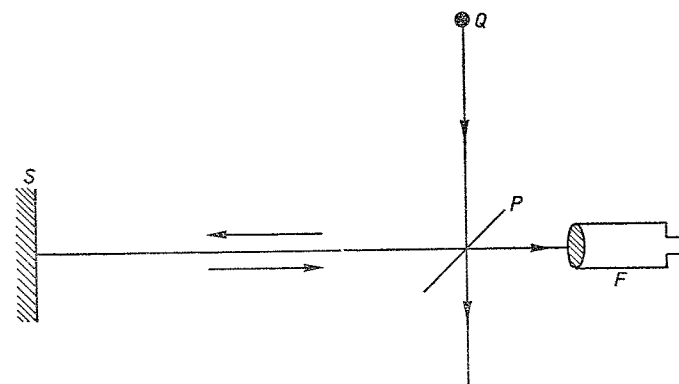


Fig. 54. Dispositivo per misurare la velocità della luce. Un raggio luminoso emesso da Q incontra uno specchio semitrasparente P ; parte del raggio lo attraversa e parte si riflette verso S . In S è nuovamente riflesso, attraversa P ed è infine osservato in F .

è possibile eseguirle anche in una stanza di dimensioni normali. Il valore numerico ottenuto è quello della [32]. Il metodo di Foucault può essere applicato anche a misure di velocità della luce nell'acqua e si è trovato che in tal caso il suo valore è *più piccolo* che nell'aria. Nella disputa fra teoria corpuscolare e teoria ondulatoria, si ebbe così un punto a favore di quest'ultima, in un campo di estrema importanza. D'altra parte ciò accadeva in un'epoca in cui il trionfo della teoria ondulatoria era già consolidato in altri campi.

4. Elementi di teoria ondulatoria, interferenza

Il maggior successo di Newton nel campo dell'ottica fu lo studio, mediante un prisma, della risoluzione spettrale della luce bianca

nelle sue componenti colorate; da un'analisi accurata di questo spettro, egli arrivò alla convinzione che ogni colore spettrale fosse una componente indivisibile della luce. Newton fu il fondatore della teoria del colore, il cui contenuto fisico è ancora oggi completamente valido, ad onta degli attacchi di Goethe. Il valore delle scoperte di Newton ebbe però l'effetto di frenare il libero sviluppo di pensiero delle generazioni successive; il suo rifiuto d'accettare la teoria ondulatoria ne impedì il consenso per quasi un secolo. Non mancarono comunque isolati sostenitori, come ad esempio Euler, grande matematico del diciottesimo secolo.

La teoria ondulatoria tornò in auge grazie alle opere di Thomas Young (1802), che si servì della nozione di *interferenza* per interpretare le righe e le frange colorate, già osservate da Newton nel caso in cui si illuminino lamine sottili di sostanze trasparenti. A questo punto dovremo occuparci in modo particolare del fenomeno dell'interferenza poiché esso è d'importanza determinante in ogni misurazione ottica di una certa precisione, e particolarmente in quelle che costituiscono la base empirica della teoria della relatività.

Abbiamo visto poco fa che un fenomeno ondulatorio è il risultato di oscillazioni periodiche, attorno a una posizione di equilibrio, delle particelle di cui è formato un corpo; la posizione istantanea della fase del moto è differente per particelle vicine e avanza con velocità costante. Chiameremo *periodo* T il tempo impiegato da una particella per compiere un'oscillazione, e *frequenza* ν il numero di oscillazioni eseguite in un secondo. Poiché il prodotto fra il tempo necessario per un'oscillazione e il loro numero al secondo dev'essere esattamente 1, avremo $\nu T = 1$, cioè

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{o} \quad T = \frac{1}{\nu}. \quad [34]$$

Useremo spesso la parola "colore" in luogo di frequenza, poiché un'onda luminosa di una data frequenza produce una ben definita sensazione di colore; come però l'azione congiunta di semplici vibra-

zioni periodiche possa dar luogo a quella molteplicità di impressioni psicologiche che designiamo con "sensazione fisica del colore", è un problema piuttosto complesso in cui non vogliamo addentrarci. Le onde che si propagano da una sorgente luminosa di piccole dimensioni hanno forma sferica; da un punto di vista fisico, ciò significa che tutte le particelle situate su una sfera con centro nella sorgente, cioè su di una "superficie d'onda", si trovano nello stesso stato di vibrazione e hanno la stessa fase (fig. 55). Una parte di tale superficie d'onda può essere deformata, per esempio per rifrazione, in modo da assumere una forma differente. La forma più semplice è evidentemente quella piana, ed è chiaro d'altra parte che una zona sufficientemente piccola di un'arbitraria superficie d'onda, in particolare di una superficie sferica, può sempre essere approssimata da un piano. Ci limiteremo quindi allo studio della propagazione di onde piane (fig. 56). In tal caso, la direzione perpendicolare al piano d'onda, cioè la normale dell'onda, individua la direzione di propagazione ed è chiaro che basterà considerare lo stato di vibrazione lungo una retta parallela a questa direzione.

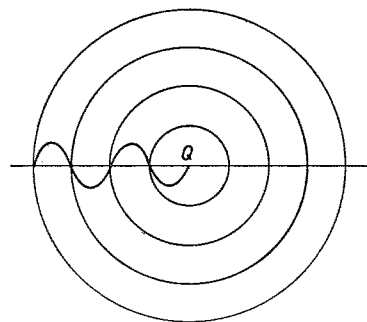


Fig. 55. Fasi di un'onda sferica emessa da Q ; ogni sfera è il luogo dei massimi, dei minimi, e in generale di tutti i punti di egual fase. Un fenomeno di questo tipo si osserva sulla superficie di un liquido in cui si sia lasciata cadere una pietra.

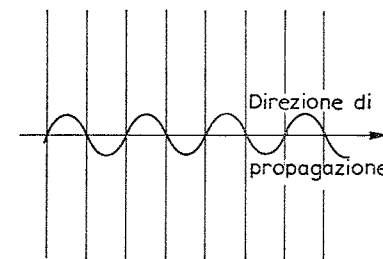


Fig. 56. Fasi di un'onda piana. I punti di uguale fase sono situati sui piani perpendicolari alla direzione di propagazione.

Non specificheremo per il momento se ogni particella vibra parallelamente o perpendicolarmente alla direzione di propagazione, cioè se si tratta di vibrazioni longitudinali o trasversali; nelle figure disegneremo semplicemente delle linee d'onda, chiamando creste e valli i massimi spostamenti verso l'alto e verso il basso.

La distanza fra due creste successive si chiama *lunghezza d'onda* e la indicheremo con λ ; ovviamente, essa è anche la distanza fra due successivi piani di egual fase.

Nel tempo T impiegato da una particella a compiere un'intera vibrazione, l'onda si sposta in avanti di un tratto pari a una lunghezza d'onda λ (com'è mostrato nella fig. 47 per il primo semiperiodo).

Poiché la velocità è per definizione il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, la velocità c dell'onda è uguale al rapporto fra le lunghezze d'onda e il periodo (vedi fig. 51, dove $\lambda = cT$ e $c = \lambda/T$):

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{oppure} \quad c = \lambda\nu. \quad [35]$$

Se un'onda attraversa due mezzi differenti, per esempio l'aria e il vetro, il tempo necessario a una vibrazione si trasmette inalterato oltre la superficie di separazione, cioè T (o ν) non muta; cambia invece la velocità c , e quindi per la [35] anche λ . Ne consegue che ogni metodo per misurare λ , può essere anche utilizzato per confrontare valori diversi della velocità della luce in varie sostanze e in differenti situazioni fisiche. Nel seguito, dovremo servirci appunto di questa circostanza.

Siamo quindi in grado di comprendere la natura del fenomeno dell'interferenza, la cui scoperta contribuì all'affermazione della teoria ondulatoria. Possiamo dire che esso consiste nel fatto paradossale che luce sommata ad altra luce non dà luogo necessariamente a una luce più intensa, ma può condurre a una illuminazione più debole o addirittura al buio.

Questo fenomeno trova una spiegazione, in accordo alla teoria ondulatoria, nel fatto che la luce non è un fascio di particelle ma uno stato di moto. Due vibrazioni che concorrono in un punto possono quindi distruggere il moto, esattamente come due persone che si adoperino per scopi opposti finiscono per precludersi ogni possibile risultato. Il modo più conveniente per osservare due treni d'onda che si sovrappongono è di osservare dall'alto le onde dovute a due imbarcazioni che navigano in un lago (fig. 57). Si noterà che

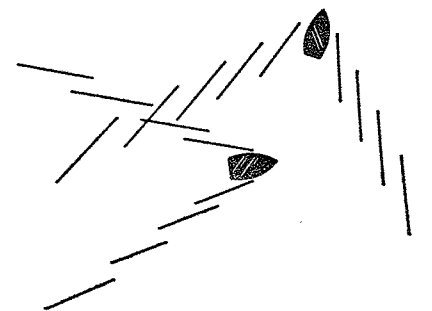


Fig. 57. Penetrazione di due treni d'onda prodotti da due battelli che navigano in un lago.

ciò avviene senza che i due sistemi ondulatori si disturbino a vicenda: infatti, anche se nella regione comune essi danno luogo a un moto piuttosto complicato, una volta oltrepassato l'altro, ciascuno procederà indisturbato nel suo moto. Se fissiamo la nostra attenzione su una specifica particella che esegue oscillazioni, possiamo constatare che essa è sottoposta all'azione indipendente dei due moti ondosi, nel senso che in ogni punto il suo spostamento è la somma di quelli che compirebbe sotto l'azione di un singolo moto ondos. Diremo quindi che questi due moti ondulatori si sovrappongono senza disturbarsi a vicenda. È chiaro allora che nei punti in cui si sovrappongono due creste o due valli di onde in fase tra loro, si dovranno ottenere massimi e minimi due volte più grandi (fig. 58)

mentre la vibrazione risultante sarà nulla nel caso in cui si incontrino una cresta e una valle (fig. 59).

Sarebbe impossibile però osservare fenomeni d'interferenza luminosa sovrapponendo treni d'onda emessi da due sorgenti differenti,

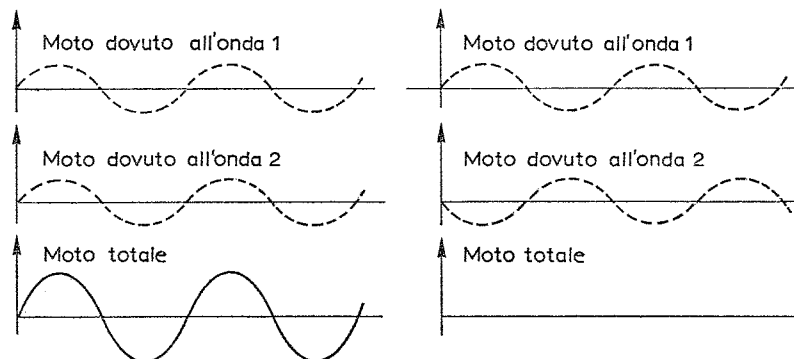


Fig. 58. Aumento dell'ampiezza nel caso in cui due onde in accordo di fase interferiscano.

Fig. 59. Elisione dovuta all'interferenza di due onde di uguale ampiezza e fasi opposte.

poiché lo stato di vibrazione di ogni onda luminosa cambia bruscamente, dopo una serie di vibrazioni regolari, in corrispondenza dei fenomeni che si generano nella sorgente durante il processo di emissione della luce. A questi cambiamenti irregolari corrisponde una fluttuazione dei fenomeni d'interferenza così rapida che i nostri occhi non possono percepirla: in tal caso non riusciremmo a vedere che un'illuminazione distribuita uniformemente.

Per poter osservare fenomeni d'interferenza dobbiamo scindere in due un raggio di luce, ad esempio utilizzando due immagini del raggio ottenute mediante riflessione o rifrazione, e quindi sovrapporle. In tal modo le irregolarità delle vibrazioni si verificano contemporaneamente nei due raggi e il fenomeno dell'interferenza non subisce alcuna fluttuazione nello spazio, poiché se in un determinato punto si è verificato un aumento o una diminuzione dell'intensità

luminosa a un certo istante, ciò continua ad avvenire negli istanti successivi. Se osserviamo tali punti mediante una lente d'ingrandimento o un cannocchiale e usiamo luce monocromatica, com'è approssimativamente quella emessa dalla fiamma gialla di un Bunsen, possiamo vedere frange o anelli d'interferenza. Usando luce naturale, che è composta di molti colori, le frange d'interferenza corrispondenti alle varie lunghezze d'onda non coincidono esattamente. Può succedere ad esempio che in un punto si abbia un'esaltazione del rosso e un'estinzione del blu, o che avvenga qualcosa di simile per colori differenti in altri punti. Si ottengono in questo modo frange colorate. Ma un discorso che approfondisse questi interessanti fenomeni, ci porterebbe troppo lontano dal nostro campo d'indagine.

Il dispositivo più semplice per realizzare fenomeni d'interferenza fu costruito da Fresnel (1822), le cui ricerche furono alla base della teoria della luce che è ancora oggi accettata. Il tempo in cui visse, le prime decadi del diciannovesimo secolo, può sotto molti aspetti essere confrontato col nostro. Come le nostre conoscenze, attraverso lo sviluppo della teoria dei quanti e della fisica nucleare, sono oggi sottoposte a un processo di approfondimento e di sviluppo tale da rivoluzionare completamente l'insieme delle leggi fisiche, così un secolo fa un gran numero di osservazioni sperimentali e di ricerche teoriche, sia nel campo della scienza sia in quello della metafisica, confluì per la prima volta nell'elaborazione di teorie complete e uniformi, la cui applicazione suggerì tutta una serie di nuovi e originali esperimenti e osservazioni. In quel tempo videro la luce la *Meccanica analitica* di Lagrange e la *Meccanica celeste* di Laplace, le due opere che portavano a compimento le idee di Newton. Da esse si sarebbero sviluppate da una parte, grazie alle opere di Navier, Poisson, Cauchy e Green, la meccanica dei corpi deformabili e la teoria dei fluidi e delle sostanze elastiche; dall'altra, ad opera di Young, Fresnel, Arago, Malus e Brewster, la teoria della luce. Nello stesso tempo si ebbero anche le prime scoperte sull'elettromagnetismo, delle quali dovremo in seguito occuparci diffusamente.

Nel dispositivo di Fresnel si fa in modo che un raggio di luce sia riflesso da due specchi, S_1 ed S_2 (fig. 60), leggermente inclinati fra loro; nei punti in cui i due raggi riflessi s'incontrano, essi danno luogo a frange di interferenza visibili per mezzo di una lente d'ingrandimento. Molti altri strumenti simili a questo sono stati successivamente costruiti, ma qui ci limiteremo a discutere un unico aspetto

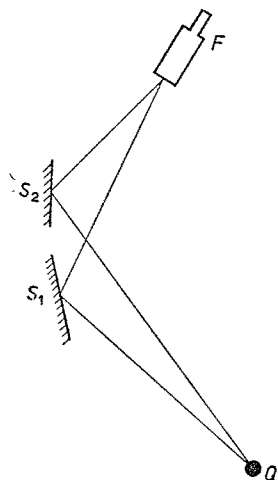


Fig. 60. Esperimento degli specchi di Fresnel.

interessante ai nostri scopi, quello cioè del metodo sperimentale usato per misurare piccole variazioni della velocità della luce. Lo strumento in questione si chiama *interferometro* e il suo funzionamento è basato sul fatto che la lunghezza d'onda varia proporzionalmente alla velocità della luce; ciò può essere osservato attraverso uno spostamento delle frange d'interferenza. Uno strumento di questo tipo è ad esempio l'interferometro di Michelson. Esso consiste essenzialmente di una lamina P parzialmente argentata in modo che parte della luce proveniente dalla sorgente Q sia rifratta e parte sia riflessa.

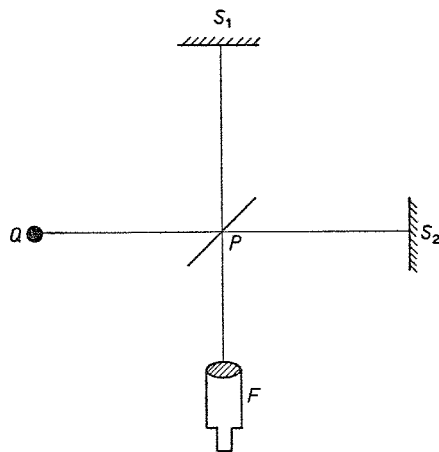


Fig. 61. Interferometro di Michelson

Questi due raggi incontrano i due specchi S_1 e S_2 , dove subiscono una riflessione e quindi incidono nuovamente sulla lamina P che li scinde ancora in due, inviando metà di ciascuno nel cannocchiale F . Se i due cammini ottici PS_1 e PS_2 sono esattamente uguali, i due raggi raggiungono il cannocchiale in accordo di fase e si ricombinano dando luogo di nuovo al raggio di partenza. Se però si allunga il percorso del primo raggio spostando lo specchio S_1 , i massimi e i minimi dei due treni d'onda che si ricombinano in F non coincidono più, ma sono spostati fra loro dando luogo ad un'onda risultante più intensa o meno. Possiamo quindi osservare in F alternativamente macchie chiare e scure, mediante lenti spostamenti dello specchio S_1 . La distanza fra due posizioni di S_1 relative a due zone scure successive è esattamente uguale alla lunghezza d'onda della luce usata; in questo modo Michelson riuscì a eseguire delle misure la cui accuratezza eccede quella di quasi tutte le altre misure che si eseguono in fisica. Ciò è possibile contando i passaggi dal chiaro al buio in un intervallo considerevole, comprendente spostamenti dello specchio S_1 pari a molte centinaia di lunghezze d'onda. L'errore commesso in ogni misura di una singola lunghezza d'onda diventa quindi molte centinaia di volte più piccolo.

In realtà ciò che vediamo nel cannocchiale dell'interferometro non è semplicemente una zona di luce o di buio, ma un sistema di frange luminose o scure. Questo fatto è legato alla circostanza che i due raggi non sono rigorosamente paralleli e le due onde non sono esattamente piane: le due parti in cui sono stati scissi i due raggi compiono quindi percorsi di lunghezza differente. Abbiamo voluto ricordare questo fatto soltanto perché generalmente si parla di frange d'interferenza, ma non ci occuperemo in modo specifico delle caratteristiche geometriche dell'esperienza.

Sarà opportuno a questo punto riportare alcuni dati numerici: col metodo precedente si è trovato che la lunghezza d'onda della luce gialla emessa dalla fiamma di un Bunsen alimentato con sale comune (NaCl) è circa 6×10^{-5} cm nel vuoto. Ricordiamo che la luce visibile è compresa in un ristretto intervallo di lunghezza d'onda,

approssimativamente, fra 4×10^{-5} cm (violetto) e 8×10^{-5} cm (rosso). Nel linguaggio dell'acustica questo intervallo comprende un'ottava, cioè la regione fra un'onda e un'altra la cui lunghezza sia doppia. Dalla formula [35] si ricava che il numero di vibrazioni al secondo della luce gialla del sodio è estremamente grande e pari a $\nu = c/\lambda = (3 \times 10^{10})/(6 \times 10^{-5}) = 5 \times 10^{14}$. Si noti che le più rapide vibrazioni acustiche udibili, oscillano soltanto 20000 volte al secondo.

La ragione della sorprendente accuratezza delle misurazioni di tipo ottico si trova nel fatto che nel percorso compiuto dalla luce in un interferometro sono comprese moltissime lunghezze d'onda. Ciò consente, ad esempio, di apprezzare le variazioni della velocità della luce in un gas per minimi cambiamenti di pressione e di temperatura. In particolare se chiudiamo in un cilindro il gas contenuto fra la lamina P e lo specchio S_1 , possiamo osservare come si modificano le figure di interferenza in corrispondenza di lievissime variazioni di pressione.

Parleremo ancora dell'interferometro di Michelson studiando l'influenza che il moto della terra esercita sulla velocità della luce.

5. Polarizzazione e trasversalità delle onde luminose

Per quanto i fenomeni d'interferenza non possano essere facilmente interpretati senza ricorrere alla teoria ondulatoria, il completo riconoscimento della sua validità fu rallentato dalla difficoltà a interpretare due diversi fenomeni che a giudizio di Newton erano in netta contraddizione con la teoria. Si tratta innanzi tutto della propagazione rettilinea della luce, e in secondo luogo dei *fenomeni di polarizzazione*. La prima difficoltà venne meno quando si approfondirono maggiormente le proprietà della propagazione per onde; si trovò infatti che un'onda può effettivamente "curvare" in corrispondenza di un angolo, ma soltanto in regioni le cui dimensioni siano dell'ordine di una lunghezza d'onda. Poiché nel caso della luce si tratta di dimensioni estremamente ridotte, noi abbiamo l'impressione di vedere, a occhio nudo, ombre nette e profili rettilinei.

Solo un'osservazione più accurata consente di scoprire le frange d'interferenza della luce diffratta lungo i bordi dell'ombra di un oggetto. Il merito d'aver elaborato una teoria della diffrazione va a Fresnel, a Kirchhoff (1882) e, più recentemente, a Sommerfeld (1895). Essi hanno spiegato da un punto di vista matematico i fenomeni fisici più complessi e hanno stabilito entro quali limiti il concetto di *raggio di luce* può ancora essere valido.

La seconda difficoltà è connessa ai fenomeni dovuti alla polarizzazione della luce. In precedenza, parlando di onde, ci siamo sempre implicitamente riferiti a onde longitudinali, com'è nel caso delle onde sonore, in cui la vibrazione consiste in condensazioni e rarefazioni successive, durante le quali le singole particelle dell'aria si muovono avanti e indietro, lungo la direzione di propagazione dell'onda. Si conoscono però anche onde trasversali come, ad esempio, quelle che si generano sulla superficie dell'acqua, o lungo una corda pizzicata, nella quale le particelle vibrano perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda. In questo caso però non si tratta di vibrazioni che si propagano nell'interno di una sostanza ma, in parte, di fenomeni di vibrazione su di una superficie (onde sull'acqua), in parte, del moto di un intero sistema (vibrazione di una corda). D'altronde non ci deve meravigliare che fosse necessario tanto tempo prima di riconoscere alle onde luminose la loro natura di vibrazioni trasversali; in quel tempo infatti non si conosceva ancora alcuna teoria né alcun risultato sperimentale sulla propagazione delle onde nei solidi elastici. Va sottolineato che lo studio della meccanica dei corpi elastici prese l'avvio da esperimenti e concetti concernenti la dinamica dell'etere imponderabile e impalpabile.

Abbiamo già visto (p. 118) quale sia l'origine del fenomeno della polarizzazione; se facciamo incidere i due raggi che emergono da un cristallo birifrangente di calcite su un secondo cristallo, essi non si comportano come la luce naturale, ma si scindono in due raggi d'intensità differente, uno dei quali può, in particolari condizioni, scomparire totalmente.

Nel caso della luce "naturale", tutte le direzioni contenute in un

piano d'onda, cioè in un piano perpendicolare al raggio, sono equivalenti (fig. 62); lo stesso non vale invece per un raggio di luce polarizzata, ad esempio per uno dei due raggi emergenti da un cristallo birifrangente. Fu Malus a scoprire (1808) che la polarizzazione non è una proprietà esclusiva della luce che attraversa un cristallo birifrangente, ma che si può ottenere luce polarizzata anche per semplice rifrazione. Egli notò che, osservando attraverso una lamina di calcite l'immagine del sole al tramonto riflessa da una finestra, l'intensità delle due immagini del sole variava ruotando la calcite. Ciò non capita se si osserva direttamente il sole attraverso la calcite. Brewster dimostrò (1815) che la luce riflessa da una lamina di vetro a un angolo particolare, viene riflessa da una seconda lamina con intensità variabile al ruotare di quest'ultima intorno al raggio incidente (fig. 63). Poiché il piano perpendicolare alla superficie

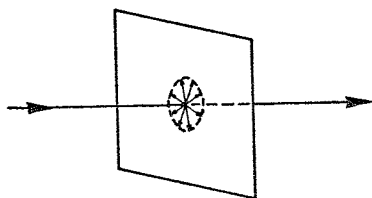


Fig. 62. Tutte le direzioni perpendicolari a un raggio di luce naturale sono equivalenti.

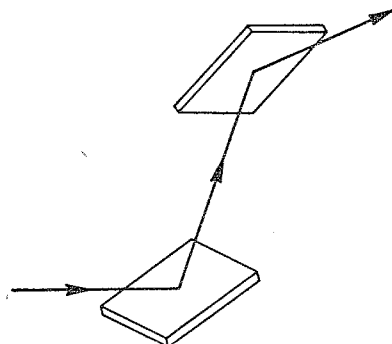


Fig. 63. Esperimento per mettere in evidenza un fenomeno dovuto alla polarizzazione: se si ruota una delle due lamine attorno al raggio incidente corrispondente, l'intensità del raggio riflesso cambia.

dello specchio e contenente il raggio incidente e il raggio riflesso si chiama *piano d'incidenza*, in tal caso diremo che il raggio è polarizzato nel piano d'incidenza; ciò significa che il raggio si comporta

in modo differente nei confronti del secondo specchio a seconda delle posizioni assunte dal secondo piano d'incidenza rispetto al primo. Questo comportamento non può essere spiegato in base alla teoria corpuscolare, poiché un corpuscolo di luce che colpisca la superficie di una lamina di vetro non può che attraversare la lamina o essere riflesso.

I due raggi che emergono da un cristallo di calcite sono polarizzati in piani perpendicolari fra loro. Se facciamo in modo che essi incidano su uno specchio secondo un angolo appropriato, uno dei due non sarà riflesso mentre l'altro sarà riflesso totalmente.

Fresnel e Arago eseguirono un esperimento decisivo (1816) quando tentarono di ottenere fenomeni d'interferenza utilizzando due raggi polarizzati perpendicolarmente fra loro. L'esperimento non ebbe successo, ed essi conclusero che le vibrazioni luminose dovevano essere trasversali.

In effetti, questa conclusione chiarì completamente anche il comportamento della luce polarizzata. Le vibrazioni delle particelle non avvengono lungo la direzione di propagazione ma perpendicolarmente ad essa, cioè nel piano d'onda (fig. 62). Ogni movimento di un punto in un piano può essere visto come risultante di due moti in direzioni perpendicolari fra loro; studiando la cinematica del punto abbiamo visto ad esempio che il suo moto è determinato univocamente una volta che siano date le coordinate cartesiane in funzione del tempo. Poiché un cristallo birifrangente ha la proprietà di trasmettere le vibrazioni luminose con velocità differenti secondo due direzioni perpendicolari fra loro, per il principio di Huygens, queste vibrazioni subiranno nel cristallo due differenti deviazioni, cioè saranno rifratte in modo diverso e quindi si separeranno. Ambedue i raggi emergenti rappresentano allora due vibrazioni che si propagano solo in ben determinati piani, passanti per i rispettivi raggi e perpendicolari fra loro (fig. 64). Due vibrazioni di questo tipo non possono chiaramente influenzarsi a vicenda: esse non danno luogo a fenomeni d'interferenza. Se, quindi, un raggio polarizzato incide su un secondo cristallo, esso è trasmesso senza che la sua

intensità diminuisca solo se la sua direzione di vibrazione è esattamente quella secondo cui questa vibrazione può propagarsi nell'interno del cristallo. In tutte le altre posizioni il raggio si scinde in due, e le intensità dei due raggi variano secondo le posizioni assunte dal secondo cristallo.

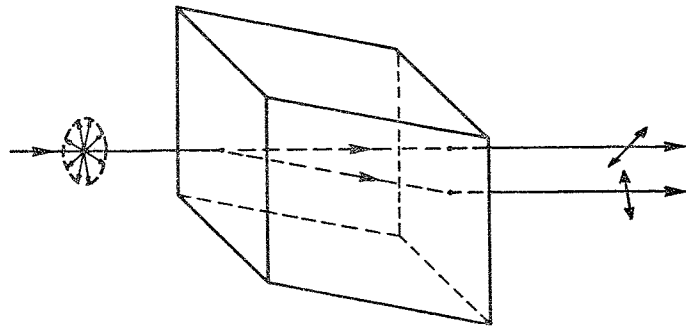


Fig. 64. I due raggi ottenuti per birifrangenza sono polarizzati in piani perpendicolari fra loro.

È possibile ottenere condizioni analoghe mediante riflessione. Per un appropriato angolo d'incidenza, delle due vibrazioni in cui si può pensare di scomporre la luce naturale, una parallela e l'altra perpendicolare al piano d'incidenza, solo una viene riflessa; la se-

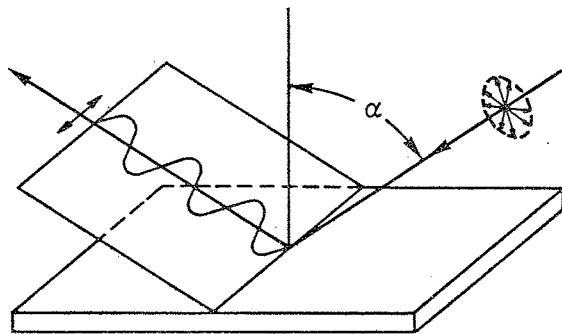


Fig. 65. Per un particolare angolo d'incidenza α la luce riflessa è polarizzata, cioè contiene solo una direzione di vibrazione.

conda penetra nello specchio e, secondo che lo specchio sia di metallo o di vetro, viene assorbita o trasmessa. In generale, non è possibile accertare se la vibrazione riflessa è quella che si propaga parallelamente o perpendicolarmente al piano d'incidenza. Nella figura 65 è stato rappresentato quest'ultimo caso. Anzi, come vedremo tra poco, lo studio della posizione assunta dalla vibrazione rispetto al piano d'incidenza o alla direzione di polarizzazione, ha dato origine a elaborate teorie e numerose discussioni.

6. L'etere come solido elastico

Una volta riconosciuta e provata da numerosi esperimenti la proprietà delle onde luminose di essere trasversali, Fresnel arrivò a ipotizzare lo sviluppo di una futura *teoria dinamica della luce* che, conformemente ai metodi della meccanica, permettesse di dedurre le caratteristiche dei fenomeni ottici dalle proprietà dell'etere e dalle forze in esso agenti. L'etere doveva essere necessariamente un solido dotato di proprietà elastiche, poiché solo in una simile sostanza possono generarsi onde meccaniche trasversali. Al tempo di Fresnel però non esisteva ancora una formulazione matematica della *teoria dell'elasticità dei solidi* e d'altra parte è possibile che egli stesso ritenesse fin dal principio che l'analogia fra l'etere e le sostanze materiali non dovesse essere spinta troppo oltre. In ogni caso Fresnel preferì studiare le leggi della propagazione luminosa da un punto di vista empirico e interpretarle servendosi della nozione di trasversalità delle onde. Innanzi tutto era presumibile che lo studio dei fenomeni ottici nei cristalli chiarisse il comportamento dell'etere: l'opera che Fresnel svolse in questo campo va posta fra le ricerche più notevoli di tutta la fisica, sia dal punto di vista sperimentale che teorico. Ma, senza perderci troppo nei particolari, cerchiamo ora di precisare il nostro problema: qual è la natura dell'etere?

I risultati di Fresnel sembrarono confermare l'analogia fra le onde luminose e quelle elastiche. Ciò diede un potente stimolo alle ricerche sulla teoria dell'elasticità, di cui già si erano occupati

Navier (1821) e Cauchy (1822) e che aveva interessato anche Poisson (1828). Nel 1829 Cauchy applicò allo studio dell'ottica le leggi delle onde elastiche. Tenteremo ora di dare un'idea del contenuto di questa teoria dell'etere.

La difficoltà maggiore per noi è che lo strumento più adeguato per descrivere le trasformazioni continue di un corpo deformabile, è il metodo delle equazioni differenziali; poiché non possiamo presumerne la conoscenza, ci limiteremo a illustrare la teoria mediante un semplice esempio, ammettendo quindi che analoghi risultati valgono anche nel caso generale, per quanto in un modo più complicato. Il lettore privo di nozioni di analisi matematica, potrà farsi almeno un'idea approssimativa del problema trattato, anche se non riuscirà a cogliere in concreto l'efficacia e la potenza dei modelli fisici e dei metodi matematici usati. D'altra parte, malgrado queste difficoltà, non possiamo rinunciare al tentativo di illustrare la meccanica dei mezzi continui, poiché tutte le teorie successive, non solo la teoria dell'etere elastico, ma anche l'elettrodinamica e, soprattutto, la teoria della gravitazione di Einstein, si fondano su questi concetti.

Una corda molto sottile tesa fra due punti è un esempio di corpo elastico a una dimensione: ce ne serviremo per sviluppare la teoria dell'elasticità. Per mantenere un legame con la meccanica ordinaria, che si occupa soltanto di singoli corpi rigidi, supponiamo che la corda non sia un corpo continuo ma abbia una struttura di tipo atomico. Ammettiamo cioè che essa consista di una serie di piccole masse allineate ad uguale distanza fra loro (fig. 66). Ogni particella



Fig. 66. Un insieme di particelle di massa m poste a uguale distanza i .

ha una massa inerziale ed esercita una forza sulle due più vicine tale da impedire un aumento o una diminuzione della distanza fra le particelle. Per farci un'immagine concreta di tali forze, pensiamo

per esempio a tante piccole molle che leghino le particelle fra loro, e impediscano ogni compressione o allungamento. Tale descrizione però non va presa troppo alla lettera, anche se proprio forze di questo tipo sono alla base dei fenomeni di elasticità.

Ora, se spostiamo di un tratto infinitesimo la prima particella in direzione longitudinale o trasversale, essa esercita immediatamente una forza sulla seconda; quest'ultima a sua volta la trasmette alla successiva e così di seguito. Lo spostamento dalla posizione di equilibrio della prima particella si propaga così lungo tutta la serie di particelle come un fenomeno ondulatorio, fino a raggiungere l'ultima. Questo processo non è però istantaneo, poiché ogni particella, a causa della sua inerzia, reagisce all'impulso dopo una certa frazione di tempo. Infatti la forza non genera uno spostamento istantaneo ma un'accelerazione, cioè una variazione di velocità durante un piccolo intervallo di tempo; è quindi necessaria un'ulteriore frazione di tempo perché la variazione di velocità generi uno spostamento. Soltanto quando questo spostamento è completo la forza agisce con tutta la sua intensità sulla particella successiva, e il processo può ripetersi progressivamente in un intervallo di tempo che dipende dalla massa delle particelle. Se la forza generata dallo spostamento della prima particella si esercitasse sull'ultima, potremmo parlare di un'azione istantanea. È quanto avviene, secondo la teoria newtoniana della gravitazione, nel caso della forza di attrazione tra due gravi. La forza con cui un grave agisce su di un altro è sempre diretta verso il punto che questo occupa all'istante, ed è funzione della distanza che separa i due corpi in quel momento. L'attrazione newtoniana è un esempio di *azione a distanza*, poiché si esercita fra due punti senza che sia trasmessa da un mezzo.

La nostra serie di punti equidistanti è invece l'esempio più semplice di *azione per contatto*, poiché l'azione esercitata dal primo punto sull'ultimo si trasmette tramite le masse interposte, e quindi non si propaga istantaneamente, ma dopo un certo intervallo di tempo. Naturalmente la forza esercitata da una particella sulle più vicine può sempre essere considerata un'azione a distanza, ma al

limite di distanze molto piccole. Possiamo cioè supporre che la distanza fra le particelle diventi sempre più piccola e che il loro numero aumenti in corrispondenza, in modo tale però che la massa totale resti invariata. È ciò che chiamiamo un *continuo*: le forze agiscono fra particelle infinitamente vicine e le leggi del moto assumono la forma di equazioni differenziali. Esse esprimono in forma matematica il concetto fisico di azione per contatto.

Vedremo in particolare questo processo di limite eseguito sulle leggi del moto, nel caso del nostro insieme di particelle. Consideriamo esclusivamente spostamenti trasversali dalla posizione di equilibrio (fig. 67); nella teoria dell'elasticità si suppone che la forza

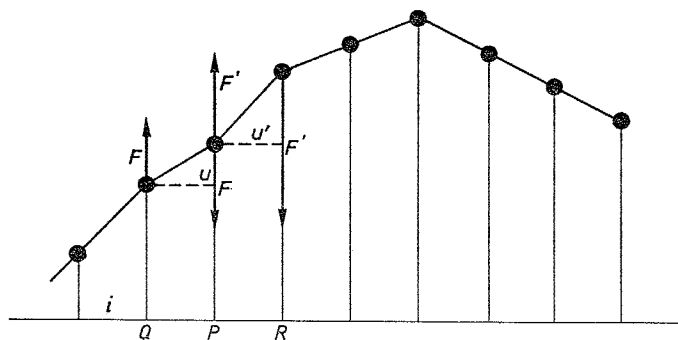


Fig. 67. Le particelle Q ed R esercitano due forze F e F' sulla particella P ; sotto l'azione di queste forze P acquista un'accelerazione.

con cui una particella P è attratta dalla sua vicina Q sia proporzionale allo spostamento trasversale di Q rispetto a P . Se chiamiamo u questo spostamento e i la distanza originale fra le particelle, la forza di richiamo è allora proporzionale al rapporto $u/i=d$, che chiameremo *deformazione*.

Poniamo

$$F = p \frac{u}{i} = pd$$

dove p è una costante, detta *costante elastica*, che è uguale alla forza corrispondente a una deformazione d unitaria.

La stessa particella subisce inoltre una forza $F' = p(u'/i) = pd'$ da parte della sua vicina di destra R . Se si esclude il caso in cui lo spostamento di P è massimo, la particella R subirà uno spostamento maggiore di P e la sua azione non sarà volta a trattenere P quanto ad incrementarne lo spostamento. F' avrà così segno opposto a F .

La forza risultante che agisce su P è quindi la differenza fra le due

$$F - F' = p(d - d')$$

e l'equazione del moto di P , secondo la legge fondamentale della dinamica, si scrive

$$ma = F - F' = p(d - d').$$

Supponiamo ora che il numero delle particelle aumenti, e proporzionalmente la loro massa diminuisca di modo che la massa totale per unità di lunghezza rimanga invariata. Vi siano, per fissare le idee, n particelle per unità di lunghezza; allora $n \cdot i = 1$ cioè $n = 1/i$ e la massa per unità di lunghezza sia $m \cdot n = m/i$. Questa quantità, che chiameremo ρ , è la *densità*; dividendo per i l'equazione del moto otteniamo le relazioni

$$a \frac{m}{i} = \rho a = \frac{F - F'}{i} = p \frac{d - d'}{i}$$

formalmente molto simili a quelle incontrate nel definire la velocità e l'accelerazione. Infatti, come la velocità è il rapporto fra lo spazio u e il tempo τ , $v = u/\tau$, con τ sufficientemente piccolo, così la deformazione è il rapporto fra lo spostamento e la distanza in posizione di equilibrio, $d = u/i$, in cui i va considerata estremamente piccola. Allo stesso modo, vi è completa analogia fra l'accelerazione, definita come il rapporto fra la variazione di velocità e il tempo $a = w/\tau = (v - v')/\tau$, e la quantità $f = (d - d')/i$, che misura la variazione di deformazione da punto a punto.

Esattamente come la velocità v e l'accelerazione a mantengono il loro significato e un valore finito anche per intervalli di tempo arbitrariamente piccoli, così le quantità d ed f mantengono il loro significato e valore finito per valori della distanza i piccoli a piacere. Le quantità di cui abbiamo parlato si chiamano in analisi *derivate* ($v=u/\tau$ e $d=u/i$ sono derivate del primo ordine, $a=(v-v')/\tau$ e $f=(d-d')/i$ del secondo ordine).

L'equazione del moto è quindi un'equazione differenziale del secondo ordine

$$\rho a = pf \quad [36]$$

sia rispetto alle variazioni del tempo, sia rispetto alle variazioni di posizione. *Tutte* le leggi della fisica connesse a fenomeni di azione per contatto hanno una formulazione teorica di questo tipo. Se avessimo studiato le deformazioni di un corpo elastico in tre dimensioni avremmo dovuto aggiungere due termini analoghi relativi alle altre due dimensioni spaziali. Leggi del tutto analoghe valgono inoltre per fenomeni di tipo elettrico e magnetico e in tale forma si presenta infine anche la teoria gravitazionale di Einstein.

È interessante osservare che le leggi di azione a distanza possono essere scritte in forma analoga alla precedente. Trascurando infatti il termine ρa nell'equazione [36], cioè assumendo che la densità sia estremamente piccola, uno spostamento della prima particella produrrà una forza istantanea agente sull'ultima, dal momento che si è trascurata l'inerzia delle particelle interposte. In questo modo la forza viene effettivamente trasmessa con velocità infinita e si ha una vera azione a distanza, anche se la legge $pf=0$ è scritta in forma differenziale del tutto analoga al caso dell'azione per contatto. Leggi di questo tipo (leggi di azione per pseudocontatto) si incontrano studiando l'elettricità e il magnetismo, dove per la prima volta sono state introdotte vere e proprie leggi di azione per contatto. Il dato essenziale in queste ultime è la presenza del termine d'inerzia, responsabile del fatto che la velocità con cui si propaga la perturbazione è finita e, quindi, della propagazione per onde.

Nell'equazione [36] due quantità caratterizzano fisicamente la sostanza: la massa per unità di volume, cioè la densità ρ , e la costante elastica p . Scrivendo $a=(p/\rho)f$, possiamo osservare che per una data deformazione, cioè per una data f , l'accelerazione aumenta quanto più aumenta p e diminuisce ρ . Ora, poiché p è una misura della rigidità elastica della sostanza e ρ della sua inerzia, è chiaro che un aumento della rigidità accelera il moto, e che ad un aumento d'inerzia dovrà corrispondere una decelerazione. Ne segue quindi che la velocità c dell'onda dipenderà solo dal rapporto p/ρ , poiché quanto maggiore è la velocità di propagazione dell'onda, tanto più grande è l'accelerazione di ciascuna particella della sostanza. Le considerazioni che seguono serviranno a precisare meglio questa dipendenza.

Ogni massa puntiforme esegue un semplice moto periodico del tipo che abbiamo già studiato (p. 56), il cui periodo è legato allo spostamento x secondo la [11] dalla formula

$$a = - (2\pi\nu)^2 x$$

dove ν è il numero di vibrazioni al secondo. Se sostituiamo al posto di ν il periodo T , secondo la relazione $T=1/\nu$ [34], possiamo scrivere

$$a = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 x.$$

Relazioni analoghe si ottengono applicando allo spazio lo stesso argomento qui usato per il tempo: basta sostituire ad a (variazione rispetto al tempo) la quantità f (variazione rispetto allo spazio) e al tempo T "periodo temporale" la lunghezza d'onda λ "periodo spaziale". Otteniamo in tal modo la formula

$$f = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 x.$$

Dividendo fra loro le espressioni ottenute per a e per f , il fattore

$(2\pi)^2 x$ si elide, e rimane

$$\frac{a}{f} = \frac{\lambda^2}{T^2}.$$

Ma, per le [35] e [36], sappiamo che $\lambda/T=c$ e $a/f=p/\rho$; ne segue allora che

$$c^2 = \frac{p}{\rho} \quad \text{o} \quad c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad [37]$$

Questa relazione vale per ogni sostanza, quale che sia il suo stato, gassoso, liquido o solido. Ma c'è una differenza: *nei liquidi e nei gas* non vi è resistenza elastica per spostamenti laterali delle particelle, ma solo in corrispondenza a variazioni di volume, cioè compressioni e rarefazioni. Quindi in tali sostanze si possono propagare *solo onde longitudinali*, la cui velocità è determinata secondo la [37] dalla costante elastica p , che condiziona appunto tali variazioni di volume.

Nei *corpi solidi* al contrario, poiché la rigidità elastica si oppone agli spostamenti laterali, si possono propagare *tre tipi di onde, una longitudinale e due trasversali*, con velocità differenti in ciascuna direzione. La ragione di questo comportamento va vista nel fatto che le compressioni e le rarefazioni delle onde longitudinali sono legate ad una costante elastica p , differente da quella che interviene nelle deformazioni laterali dovute a vibrazioni trasversali.

D'altra parte, per i corpi che non hanno struttura cristallina, è possibile scegliere arbitrariamente la direzione di vibrazione delle onde trasversali, che hanno tutte una stessa velocità c_t , mentre l'onda longitudinale ha velocità differente c_l (fig. 68).

Tutte queste affermazioni trovano una conferma sperimentale nello studio della propagazione delle onde acustiche nei solidi.

Ritorniamo ora all'argomento che ha dato origine alle precedenti riflessioni, cioè alla teoria elastica della luce: essa consiste nel trattare l'etere come un solido elastico in cui le onde luminose si propagano come delle onde sonore in un ipotetico mezzo.

Quali proprietà dobbiamo assegnare all'etere elastico? In primo luogo a causa del grandissimo valore della velocità di propagazione c , è necessario supporre che la rigidità elastica p sia molto elevata o che la densità ρ sia molto piccola, oppure che ambedue queste condizioni si verifichino contemporaneamente. Inoltre, poiché la luce non si propaga con la stessa velocità in tutte le sostanze, dobbiamo

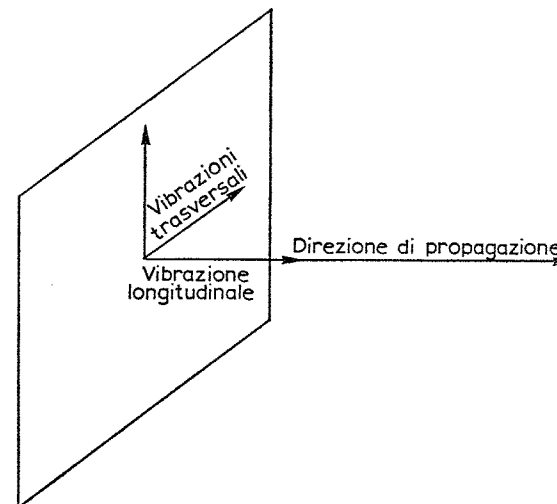


Fig. 68. Nei solidi, gli atomi possono vibrare sia lungo la direzione di propagazione che perpendicolarmente ad essa.

ritenere che l'etere si condensi in modo diverso all'interno dei corpi o che possa variare la sua elasticità; anche in questo caso, le due circostanze possono verificarsi simultaneamente. Ci troviamo di fronte a questo punto a diverse possibilità, il cui numero è ulteriormente accresciuto dal fatto che, come abbiamo già visto (p. 134), non è possibile decidere mediante un esperimento se la direzione di vibrazione della luce polarizzata è parallela o perpendicolare al piano di polarizzazione (piano di incidenza dello specchio polarizzante).

È comprensibile allora che, trattandosi di un problema non bene definito, siano state formulate differenti teorie sulla natura dell'etere elastico: a quelle già ricordate di Navier, Cauchy e Poisson, dobbiamo ora aggiungere le teorie di Green e di Neumann.

Possiamo anche provare una certa sorpresa per l'ingenuità e l'impegno esagerato con cui si cercò una spiegazione dei fenomeni ottici in termini di un etere dotato delle stesse proprietà di un solido elastico; ma noi oggi abbiamo imparato che la natura di un solido elastico è tutt'altro che semplice, poiché esso ha in realtà una struttura atomica e non continua. La fisica dell'etere si è dimostrata più semplice e più facilmente comprensibile della fisica della materia.

La prima obiezione all'ipotesi dell'etere elastico, nasce dalla necessità di ammettere che la sua rigidità sia sufficientemente elevata da spiegare l'alta velocità delle onde. Tale sostanza infatti offrirebbe necessariamente una notevole resistenza al moto dei corpi celesti, particolarmente dei pianeti, mentre gli astronomi non hanno mai misurato alcuna deviazione dalle leggi di Newton che ne giustificasse l'esistenza. Stokes (1845) tentò di superare questa obiezione, facendo osservare che il concetto di solidità di un corpo ha in sé qualcosa di relativo: se noi colpiamo con un martello un pezzo di resina (o di ceralacca o di cristallo), questo si spacca in modo netto; ma se poniamo su di esso una certa massa, essa affonda in modo graduale, anche se lentissimo, nel corpo, che si comporta così come un liquido viscoso. D'altra parte, le forze che intervengono nella propagazione delle onde luminose, variano in tempi estremamente brevi (circa 6×10^{12} volte al secondo) rispetto alle variazioni relativamente lente che si verificano nei moti dei pianeti; il rapporto fra le variazioni di questi due tipi di forze è molto più elevato di quello che si ha fra la forza impulsiva dovuta al colpo di martello e la forza di pressione dovuta al peso. Se ne conclude quindi che l'etere può comportarsi come un solido elastico nei confronti della luce, e non opporre alcuna resistenza al moto dei pianeti.

Il fatto è che, se anche riuscissimo ad accettare l'idea che lo spazio astronomico è totalmente riempito da una specie di resina, le

difficoltà più serie sorgono proprio quando si cerchi di spiegare con questa ipotesi la propagazione della luce. Innanzi tutto dobbiamo tener presente che nei solidi, contemporaneamente a un'onda longitudinale, si propagano sempre due onde trasversali. Se consideriamo allora la rifrazione di un'onda alla superficie di separazione fra due mezzi, e supponiamo che nel primo mezzo la vibrazione sia puramente trasversale dovremo ammettere che nel secondo mezzo sia presente, insieme all'onda trasversale, anche un'onda longitudinale. Tutti i tentativi di evitare questa conseguenza della teoria, immaginando le più arbitrarie e svariate modificazioni, sono falliti. Un'ipotesi abbastanza strana suggeriva che l'etere si opponesse alle compressioni con una resistenza infinitamente più piccola, o più grande, di quella esercitata nei confronti delle deformazioni trasversali. In ogni caso allora la vibrazione longitudinale non avrebbe potuto manifestarsi come fenomeno luminoso, poiché nella prima ipotesi l'onda avrebbe avuto velocità infinitamente piccola, nella seconda infinitamente grande. Il fisico MacCullagh (1839) portò ad un tal grado di complicazione una sua teoria dell'etere, da rinunciare completamente al modello del corpo elastico. Infatti, mentre in un solido ciascuna particella si oppone a qualsiasi variazione della distanza che la separa dalle più vicine, l'etere di MacCullagh aveva la proprietà di opporsi ai moti di rotazione, attorno a una particella, delle due più vicine. Non possiamo naturalmente addentrarci troppo in questa teoria; ma, per quanto ciò possa sembrare strano, essa ha una certa importanza come prima anticipazione della teoria elettromagnetica della luce. Le formule che si ottengono sono infatti molto simili a quelle della teoria elettromagnetica, ed essa riesce a spiegare i fenomeni ottici in modo abbastanza corretto. Essa rivela però i suoi limiti nell'incapacità di chiarire le connessioni esistenti fra i fenomeni ottici e altri fenomeni fisici. È chiaro d'altra parte che è sempre possibile costruire un modello arbitrario per l'etere, che consenta una corretta interpretazione di un certo gruppo di fenomeni; ciò che conta è che le nostre ipotesi permettano di stabilire nuove connessioni fra differenti fenomeni fisici. Il grande

progresso della teoria di Maxwell, di cui parleremo più avanti, è proprio nell'aver dimostrato che la luce è un fenomeno elettromagnetico.

7. L'ottica dei corpi in movimento

Dobbiamo ora discutere i nessi che esistono fra la teoria dell'etere elastico e la relatività riguardo al problema dello spazio-tempo. Nello studio dei fenomeni ottici, non ci siamo occupati finora né della posizione, né dello stato di moto dei corpi che emettono, ricevono o trasmettono luce; è a questi problemi appunto che vogliamo rivolgere la nostra attenzione.

Lo spazio che in meccanica, in assenza di corpi materiali, è considerato vuoto, è in ottica completamente occupato dall'etere, cioè da una specie di materia dotata di massa, densità ed elasticità. A questo universo riempito d'etere possiamo quindi applicare la teoria newtoniana dello spazio-tempo; esso non è formato da masse isolate separate da spazi vuoti, ma consiste di una distribuzione continua di etere nel cui interno galleggiano le masse dei corpi. L'etere e la materia interagiscono mediante forze di tipo meccanico e si muovono secondo le leggi di Newton. Sotto l'aspetto logico è quindi lecito studiare i fenomeni ottici da un punto di vista newtoniano; resta da vedere se ciò è confermato dall'esperienza.

Tuttavia, non è possibile realizzare degli esperimenti che rispondano in modo soddisfacente a questo problema, poiché nulla sappiamo dello stato di moto dell'etere all'esterno e all'interno della materia, e vi è quindi un'ampia possibilità di ipotesi. Il problema va così posto in questi termini: siamo in grado di fare delle ipotesi sulle azioni reciproche fra etere e materia, che diano una corretta interpretazione di tutti i fenomeni ottici?

Se ora ricordiamo che, secondo il principio di relatività della meccanica classica, lo spazio assoluto esiste solo in un senso molto ristretto, in quanto tutti i sistemi inerziali in moto rettilineo e uniforme rispetto a un altro sistema possono essere considerati

fermi nello spazio, possiamo immediatamente fare l'ipotesi: *l'etere astronomico, molto distante dai corpi materiali, è, in ogni sistema inerziale, in uno stato di quiete*. Se così non fosse, alcune parti dell'etere sarebbero accelerate, e dovremmo pensare all'esistenza di forze centrifughe tali da produrre variazioni di densità ed elasticità; le nostre osservazioni sulla luce proveniente dalle stelle non ci danno però alcuna indicazione in questo senso.

Questa ipotesi soddisfa da un punto di vista formale il principio di relatività classica. Se l'etere è annoverato fra i corpi materiali, i moti di traslazione dei corpi rispetto all'etere sono dei moti relativi, esattamente come nel caso di due corpi in moto fra loro; non è possibile quindi riconoscere un moto di traslazione dell'etere e di tutta la materia con esperienze di tipo meccanico o ottico.

Ma in un universo costituito *soltanto* di corpi materiali, in cui non esista l'etere, non è necessario che valga il principio di relatività: una qualunque traslazione di tutta la materia a cui l'etere non partecipi (cioè un moto relativo rispetto ad esso), può essere osservata mediante un esperimento di ottica. In questo senso, l'etere individuerrebbe un sistema di riferimento assolutamente a riposo. Il problema principale per la nostra discussione è di stabilire se i fenomeni ottici dipendono esclusivamente dai moti relativi dei corpi, oppure se è possibile riconoscere uno stato di moto rispetto all'etere.

Un'onda luminosa è definita da tre grandezze:

- 1) la frequenza di vibrazione ν ,
- 2) la velocità c ,
- 3) la direzione di propagazione.

La lunghezza d'onda λ , che è un'altra grandezza caratteristica, è definita come il rapporto fra c e ν (vedi [35]).

Cercheremo adesso di studiare in modo sistematico, come si modifichino le relazioni esistenti tra queste tre grandezze, in connessione al mezzo in cui si propaga la luce (l'etere cosmico o un qualunque mezzo trasparente), per effetto dei moti fra i corpi che emettono luce e quelli che la ricevono.

Ci serviremo di un metodo, a prima vista piuttosto complicato,

che ci sarà molto utile nel seguito. Consideriamo un treno d'onde che si propaga in direzione dell'asse x con velocità c , formato da n onde di lunghezza d'onda λ . Nella figura 69 si è scelto $n=4$.

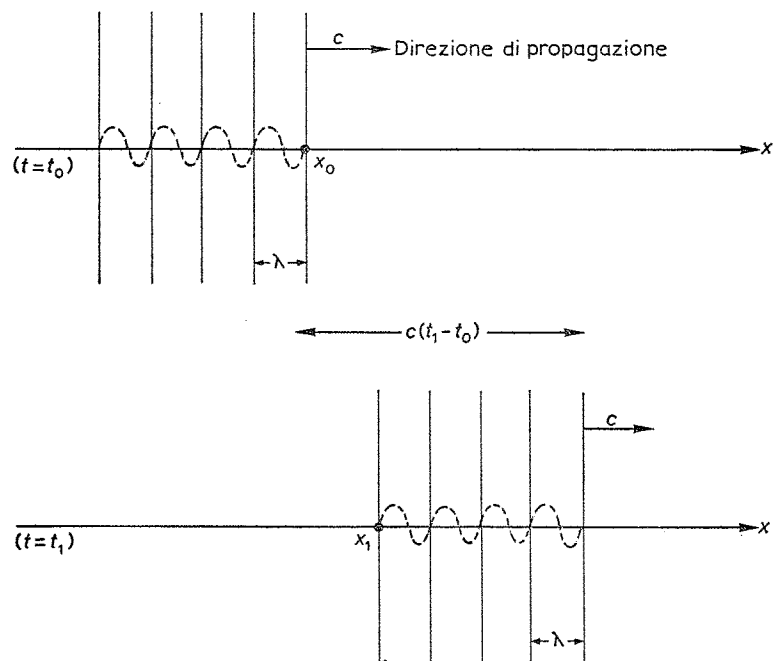


Fig. 69. Misura del numero di onde contenute in un treno d'onde.

Supponiamo che all'istante t_0 il treno d'onde raggiunga il punto x_0 e che all'istante t_1 si allontani dal punto x_1 ; noti questi quattro numeri, è possibile calcolare n . Dalla figura 62 ricaviamo infatti che $c(t_1 - t_0) = x_1 - x_0 + n\lambda$, da cui

$$n = \frac{c}{\lambda} \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} \right) = \nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} \right), \quad [38]$$

dove si è tenuto conto del fatto che $c = \nu\lambda$ [35]. Questa equazione ci permette di misurare n in due modi molto semplici.

Se osserviamo il treno d'onde ad un punto fisso ($x_1 = x_0$), possiamo ricavare n dal rapporto fra il tempo $t_1 - t_0$ impiegato da tutto il treno d'onde a oltrepassarlo, e il tempo $T = 1/\nu$ impiegato da una sola onda. Se eseguiamo invece una misura a tempo fisso ($t_1 = t_0$), $x_1 - x_0$ è la lunghezza del treno d'onde ed n è il rapporto fra ($x_1 - x_0$; e λ).

D'altra parte il numero di onde che costituiscono un treno d'onde è una quantità indipendente dal sistema di coordinate; il metodo precedente può essere usato per calcolare n anche nel caso di un sistema in moto, ottenendo un identico risultato. In altri termini, non è possibile che il numero d'onde sia quattro per un osservatore in quiete e cinque per uno in moto. L'equazione [38] è quindi invariante, nel senso che abbiamo attribuito prima a questa parola.

Ciò è ancora più chiaro nel linguaggio di Minkowski: l'allontanarsi della prima onda dal punto x_0 all'istante t_0 , e l'arrivare dell'ultima nel punto x_1 al tempo t_1 sono due eventi, cioè due punti di universo. Questi punti esistono indipendentemente dal fatto che si sia definito un sistema di riferimento. Poiché quindi il numero n è determinato dalla conoscenza dei punti di universo x_0, t_0 e x_1, t_1 , esso non dipende dal sistema di riferimento, cioè è un invariante.

Da queste considerazioni è possibile dedurre con facili ragionamenti, o servendosi delle trasformazioni di Galileo, tutti i teoremi sul comportamento delle tre grandezze frequenza, direzione e velocità, nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro.

8. L'effetto Doppler

Fu Christian Doppler (1842) a scoprire che la frequenza di un'onda dipende dal moto della sorgente luminosa e dell'osservatore rispetto al mezzo interposto. Questo fenomeno è abbastanza semplice da osservare nel caso di onde sonore: il fischio di una locomotiva sembra più acuto quando questa si avvicina all'osservatore e diviene più grave a partire dall'istante in cui passa. Al rapido avvicinarsi della sorgente sonora corrisponde un aumento delle fasi delle onde, cosicché

massimi e minimi si succedono più rapidamente; in modo del tutto analogo un osservatore in moto verso la sorgente riceve le onde secondo una più rapida successione.

Un fenomeno dello stesso tipo deve valere naturalmente anche nel caso di vibrazioni luminose. Come sappiamo a una frequenza della luce corrisponde un certo colore osservato, in uno spettro che va dal violetto, per le vibrazioni più rapide, al rosso, per quelle più lente. Dobbiamo ritenere allora che, quando la sorgente di luce si avvicina all'osservatore, o viceversa, il colore della radiazione si sposti verso il violetto; quando sorgente e osservatore si allontanano fra loro, lo spostamento sia verso il rosso. Questo fenomeno è stato effettivamente osservato.

Si tenga presente però che la luce emessa da un gas non consiste di tutte le frequenze possibili, ma soltanto di un numero limitato di frequenze. Lo spettro luminoso ottenuto mediante un prisma o un qualunque altro dispositivo, non ha l'aspetto di una distribuzione continua di colore simile a quella dell'arcobaleno, ma è formato da righe colorate, nette e separate fra loro. La frequenza di queste linee spettrali è caratteristica degli elementi chimici contenuti nel gas (analisi spettrale di Bunsen e Kirchhoff, 1859). Lo spettro della luce stellare, per esempio, è di questo tipo, e le righe coincidono con quelle di elementi esistenti sulla terra; da questo risultato, si è portati a concludere che i principali costituenti della materia, anche nelle più lontane regioni dello spazio astronomico, siano gli stessi. Non vi è però una coincidenza perfetta tra le righe di questi due spettri, e le osservazioni hanno messo in evidenza un leggero spostamento in una direzione, per una metà dell'anno, e in direzione opposta per l'altra metà. Queste variazioni della frequenza sono una conseguenza dell'effetto Doppler, dovuto al moto della terra intorno al sole. Se ci riferiamo a una stella in particolare, possiamo pensare che durante una metà dell'anno la terra si avvicini ad essa, e quindi, in corrispondenza a un aumento delle frequenze di tutte le onde luminose della luce stellare, le righe dello spettro appaiano spostate verso l'estremo violetto, mentre,

durante l'altra metà dell'anno, quando la terra si allontana dalla stella, si osservi uno spostamento delle righe verso il rosso.

Lo spettro stellare ci fornisce così una immagine suggestiva del moto della terra, anche se all'osservazione il fenomeno non si manifesta in modo completamente chiaro poiché ad esso si sovrappone l'effetto Doppler dovuto al moto della sorgente di luce. Infatti, dato che le stelle non sono a riposo nell'etere, il loro moto deve dar luogo a un ulteriore spostamento delle righe spettrali che, non presentando una variazione annuale, potrà essere facilmente distinto e separato da quello dovuto al moto della terra. Da un punto di vista astronomico anzi, questo fenomeno è ancora più importante, perché ci permette di ottenere delle informazioni sulle velocità anche delle stelle più lontane, in quanto il moto implica un avvicinamento o un allontanamento rispetto alla terra. Ma uno studio più approfondito di questi fenomeni ci allontanerebbe troppo dal nostro scopo.

Ci interessa piuttosto studiare cosa succede quando l'osservatore e la sorgente si muovono nella medesima direzione e con identica velocità. Le ipotesi che possiamo formulare sono: che non si abbia più l'effetto Doppler; che esso dipenda dal moto relativo dei due corpi; che l'effetto non scompaia e sia di conseguenza possibile riconoscere il moto dei corpi attraverso l'etere. In quest'ultimo caso il principio di relatività sarebbe valido per i fenomeni ottici che si verificano tra corpi materiali.

La soluzione di questo problema secondo la teoria dell'etere è che l'effetto Doppler non dipende soltanto dal moto relativo fra la sorgente e l'osservatore, ma anche, sia pure in piccola parte, dai moti di ambedue rispetto all'etere. Questo effetto tuttavia è così piccolo da non poter essere osservato, e inoltre, nel caso di un moto di traslazione comune della sorgente e dell'osservatore, è esattamente zero.

Quest'ultimo punto è di per sé stesso così evidente, da rendere superfluo qualsiasi rilievo; basta riflettere al fatto che le onde passano per due punti qualsiasi, in quiete relativa, secondo un'identica successione di massimi e minimi, senza riguardo al fatto che i due

punti siano in quiete nell'etere o nello stesso stato di moto. Tuttavia il principio di relatività non vale rigorosamente, ma solo approssimativamente, poiché i corpi emettono e assorbono luce. È quanto ci proponiamo di dimostrare, servendoci della proprietà d'invarianza del numero d'onda, precedentemente dimostrata.

Supponiamo che un osservatore solidale con un sistema di riferimento in quiete rispetto all'etere, osservi un treno d'onde che raggiunge all'istante t_0 il punto x_0 e si allontana da x_1 al tempo t_1 (fig. 70).

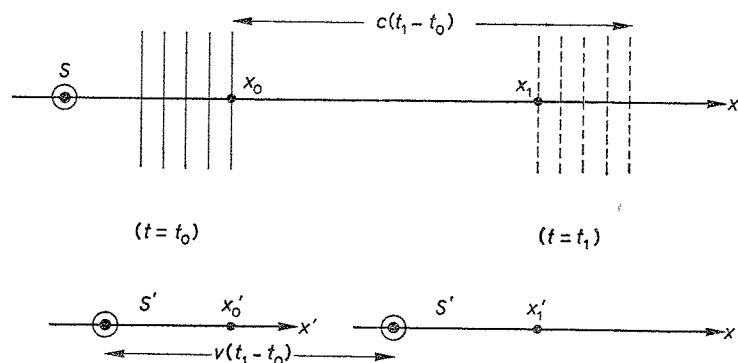


Fig. 70. Osservazione di un treno d'onde da due sistemi di riferimento. S è a riposo ed S' si muove con velocità v nella direzione di propagazione.

Sappiamo allora [38] che il numero d'onda è dato dalla relazione

$$n = \nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} \right).$$

Un altro osservatore in moto con velocità v nella direzione dell'asse x , misurerà col medesimo procedimento lo stesso numero n ; egli percepirà però una frequenza ν' e una velocità c' diverse dalle precedenti. Supponendo che al tempo t_0 il treno d'onde raggiunga x'_0 e al tempo t_1 si allontani da x'_1 , avremo

$$n = \nu' \left(t_1 - t_0 - \frac{x'_1 - x'_0}{c'} \right),$$

quindi

$$\nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} \right) = \nu' \left(t_1 - t_0 - \frac{x'_1 - x'_0}{c'} \right). \quad [39]$$

La trasformazione di Galileo [29], connette x_1 e x_0 con x'_1 e x'_0 ; posto che i punti $x=0$ e $x'=0$ dei due sistemi coincidano al tempo $t=0$, avremo che $x'_1 = x_1 - vt_1$ e $x'_0 = x_0 - vt_0$.

Mediante la [39] possiamo quindi calcolare la relazione fra le grandezze caratteristiche del treno d'onde nei due sistemi. Nel caso in cui i due osservatori eseguono una misura nello stesso istante di tempo, $t_1 = t_0$, sarà $x_1 - x_0 = x'_1 - x'_0$ e, per la [39],

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu'}{c'}. \quad [40]$$

Se la misura è fatta invece fissando un punto nel sistema di riferimento in moto, $x'_1 = x'_0$, la trasformazione di Galileo darà $x_1 - x_0 = x'_1 - x'_0 + v(t_1 - t_0) = v(t_1 - t_0)$. Introducendo questo risultato nella [39] si ottiene

$$\nu \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \nu'. \quad [41]$$

La relazione trovata fra le frequenze ν e ν' dimostra che si ha una diminuzione della frequenza, quando l'osservatore si muove con velocità v nella direzione di propagazione della luce.

Dalle [40] e [41] si ottiene l'ovvio risultato

$$c' = c - v. \quad [42]$$

Per ottenere la [41], sarebbe stato sufficiente servirsi di quest'ultima relazione e del fatto evidente che la lunghezza d'onda nei differenti sistemi di riferimento è la stessa, cioè $\lambda' = \lambda$. Ma abbiamo preferito questo metodo che utilizza l'invarianza del numero d'onda poiché ci sarà utile in seguito, quando ci occuperemo della teoria della relatività. Vedremo allora che le relazioni $c' = c - v$ e $\lambda' = \lambda$ non saranno più valide e dovranno essere sostituite da altre relazioni.

Supponiamo ora, al contrario, che una sorgente di luce con frequenza ν_0 si sposti con velocità v_0 lungo la direzione dell'asse x e che un osservatore, in quiete rispetto all'etere, misuri la frequenza ν . Questo caso è immediatamente riconducibile al precedente, dal momento che le nostre argomentazioni non richiedono una sostanziale modifica nel caso in cui sia la sorgente e non l'osservatore a muoversi. Tenendo presente quindi che il punto in moto questa volta è la sorgente luminosa, la relazione cercata si otterrà dalla precedente sostituendo v con v_0 e ν' con ν_0 :

$$\nu_0 = \nu \left(1 - \frac{v_0}{c} \right);$$

nota ν_0 , che è la frequenza della sorgente, ricaviamo per ν il valore

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - v_0/c}. \quad [43]$$

Dal momento che il denominatore è sempre minore di uno la frequenza osservata sarà maggiore di quella emessa.

Vediamo allora che vi è differenza tra il caso in cui l'osservatore viaggia in una direzione con velocità v e quello in cui la sorgente si muova con la stessa velocità ma in verso opposto. Basta osservare che, se la sorgente a riposo emette una radiazione di frequenza ν_0 e l'osservatore si sposta verso destra con velocità v la frequenza osservata ν_B è data per la [41] da

$$\nu_B = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right).$$

Mentre se la sorgente si allontana dall'osservatore a riposo, con velocità v diretta verso sinistra, posto $v_0 = -v$ nella [43], otteniamo

$$\nu_B = \nu_0 \left(\frac{1}{1 + v/c} \right).$$

Queste due frequenze non sono uguali, anche se in tutti i casi di

interesse pratico la differenza è del tutto trascurabile. Abbiamo visto (p. 124) che il rapporto fra la velocità della terra nella sua orbita attorno al sole e la velocità della luce è $\beta = (v/c) = 1/10\,000$; valori di β di questo ordine di grandezza, si ottengono d'altra parte anche per gli altri corpi celesti. Con ottima approssimazione possiamo scrivere quindi

$$\frac{1}{1 + \beta} = 1 - \beta$$

poiché, trascurando $\beta^2 = 10^{-8}$ rispetto a 1, $(1 + \beta)(1 - \beta) = 1 - \beta^2 = 1$.

Il fatto che si possa trascurare il quadrato di β , avrà un ruolo importante in ciò che diremo in seguito. Inoltre poiché sono molto rari i casi in cui è possibile misurare quantità dell'ordine di β^2 , tale approssimazione è quasi sempre lecita. Di solito le quantità che intervengono nello studio dei fenomeni ottici (ed elettromagnetici) dei corpi in movimento, si classificano secondo che esse siano dell'ordine di β o di β^2 . Nel primo caso si parla di quantità del primo ordine in β , nell'ultimo di quantità del secondo ordine. In questo senso possiamo affermare che: se si trascurano quantità del secondo ordine in β , l'effetto Doppler dipende esclusivamente dal moto relativo fra sorgente e osservatore.

Supponendo che siano simultaneamente in moto la sorgente (con velocità v_0) e l'osservatore (con velocità v), la frequenza osservata ν' si ottiene inserendo la [43] nella [41]:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \nu_0 \frac{1 - v/c}{1 - v_0/c} \sim \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) \sim \nu_0 \left(1 + \frac{v_0 - v}{c} \right).$$

In tal caso, se le due velocità sono uguali, ν' coincide con ν_0 ; questo significa che l'osservatore non percepisce alcun effetto dovuto al suo moto insieme alla sorgente, rispetto all'etere. L'effetto Doppler si verifica non appena v e v_0 differiscono fra loro, e, al primo ordine dipende soltanto dalla differenza $v - v_0$; naturalmente ciò non è più vero se si includono anche termini del secondo ordine. La possibilità di osservare uno stato di moto rispetto all'etere è quindi legata al

fatto che la differenza non sia del secondo ordine e quindi troppo piccola per poter essere misurata.

In conclusione, l'effetto Doppler non è utilizzabile in pratica per riconoscere lo stato di moto di un corpo nello spazio astronomico, rispetto all'etere.

È possibile osservare l'effetto Doppler anche mediante una sorgente di luce terrestre, con la condizione naturalmente che essa si muova a una velocità estremamente elevata, tale che il rapporto $\beta = v/c$ raggiunga valori misurabili. J. Stark (1906) si servì per questo dei cosiddetti *raggi canale*. Supponiamo che in un tubo a vuoto, contenente idrogeno molto rarefatto, vengano fissati due elettrodi, e che uno di questi, nel quale sia stato praticato un foro, sia connesso al polo negativo di una pila (fig. 71); allora, oltre ai cosiddetti raggi

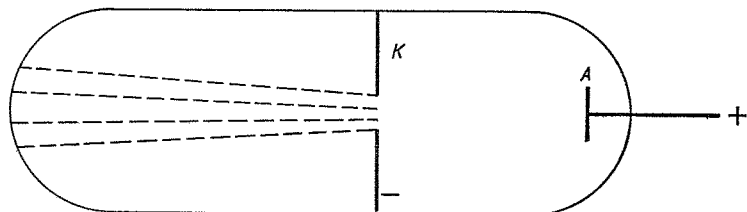


Fig. 71. Tubo a vuoto con un catodo K e un anodo A . Gli atomi e le molecole carichi si muovono con grande velocità verso sinistra, passando attraverso un foro praticato nel catodo.

catodici, emessi appunto dal catodo, è possibile osservare un pennello luminoso di colore rosso che penetra attraverso il foro del catodo, dovuto agli atomi o molecole d'idrogeno carichi positivamente in moto con velocità molto elevate (come scoprì Goldstein nel 1886). Poiché la velocità di questi raggi canale è dell'ordine di 10^8 cm/s, β diventa

$$\beta = \frac{10^8}{3 \times 10^{10}} = \frac{1}{300},$$

che è un valore abbastanza alto rispetto a quelli che si ottengono con misure astronomiche.

Stark studiò lo spettro dei raggi canale e trovò che le righe dell'idrogeno mostrano il tipico spostamento dovuto all'effetto Doppler. Questa scoperta, di grande importanza per la fisica atomica, non è però strettamente connessa al nostro tema.

Vogliamo ricordare infine che Belopol'skij (1895) e Galitzin (1907) trovarono che è anche possibile ottenere un effetto Doppler servendosi di sorgenti di luce sulla terra e specchi in movimento.

9. Il trascinamento della luce da parte della materia

Volgiamo adesso la nostra attenzione alla seconda grandezza caratteristica di un treno d'onde, la *velocità*, che secondo la teoria dell'etere dipende dalla densità e dall'elasticità di questo mezzo. Ciò significa che essa ha un valore definito nell'etere dello spazio astronomico, ma può avere valori diversi in ogni corpo, secondo come esso modifica le proprietà dell'etere nel suo interno e lo trascina nel suo moto.

La velocità della luce nello spazio astronomico è c , se l'osservatore è a riposo, $c' = c - v$, se l'osservatore si muove con velocità v nella direzione della luce, come sappiamo dalla [42].

Per chiarire meglio questo punto possiamo pensare che un osservatore in moto attraverso l'etere sia investito da un vento d'etere che trasporta con sé le onde luminose, proprio come l'aria investe un'automobile che viaggia ad alta velocità e trascina con sé il suono.

Ciò consente allora di rivelare il moto, per esempio della Terra o del sistema solare rispetto all'etere. Vi sono due metodi essenzialmente differenti per misurare la velocità della luce, uno astronomico e uno terrestre. Il primo, il vecchio metodo di Römer basato sulle eclissi dei satelliti di Giove, consiste nel misurare la velocità della luce che percorre la distanza fra Giove e la Terra. Nel secondo, sorgente e osservatore partecipano ambedue al moto della Terra; è naturale chiedersi allora se questi due metodi conducano esatta-

mente allo stesso risultato, o se non esistano deviazioni che permettano di riconoscere un moto relativo rispetto all'etere.

Maxwell (1879) fece notare che osservando le eclissi dei satelliti di Giove, si doveva poter accertare il moto dell'intero sistema solare rispetto all'etere. Supponiamo che Giove si trovi in un punto A della sua orbita (fig. 72), e che A sia il punto più vicino all'orbita del sole nel moto del sistema solare nella direzione indicata. (In figura l'orbita di Giove interseca l'orbita del sistema solare nel punto A .)

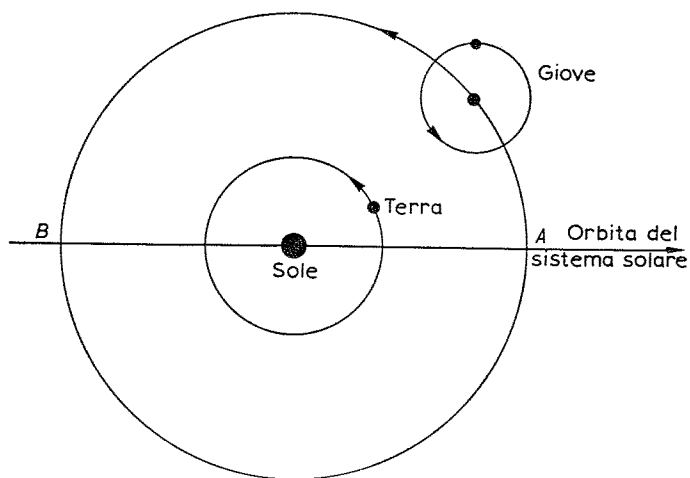


Fig. 72. Moto del sistema solare nell'etere.

Poiché il periodo di rivoluzione di Giove è di circa dodici anni, nel corso di un anno esso si sposterà di poco dal punto A . Ma in un anno la terra descrive una sola orbita e quindi dall'osservazione dell'eclissi (vedi fig. 52), è possibile risalire al tempo impiegato dalla luce per attraversare il diametro dell'orbita terrestre. D'altra parte poiché il sistema solare si sposta insieme al sole verso A , la luce che da Giove raggiunge la terra viaggerà in direzione contraria a questo moto e la sua velocità sembrerà aumentata. Dopo sei anni,

Giove si troverà nel punto opposto B e la luce, viaggiando in questo caso nella stessa direzione del sistema solare, impiegherà un tempo maggiore per incontrare l'orbita della terra, e la sua velocità apparirà così minore.

Quando Giove si trova nel punto A , le eclissi di uno dei suoi satelliti durante metà anno terrestre hanno un ritardo $t_1 = l/(c+v)$, dove l è il diametro dell'orbita terrestre; se invece Giove si trova nel punto B , il ritardo vale $t_2 = l/(c-v)$. Se il sistema solare fosse a riposo rispetto all'etere, t_1 e t_2 sarebbero ambedue uguali a $t_0 = l/c$; in realtà la loro differenza vale

$$t_2 - t_1 = l \left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2lv}{c^2 - v^2} = \frac{2lv}{c^2(1 - \beta^2)},$$

che, trascurando β^2 rispetto ad 1, si può scrivere come

$$t_2 - t_1 = \frac{2lv}{c^2} = 2t_0\beta.$$

Questo ci permette di calcolare β e quindi anche la velocità $v = \beta c$ del sistema solare rispetto all'etere. Ora, poiché la luce impiega circa 8 minuti per andare dal sole alla terra e quindi $t_0 = 16 \text{ min} \cong 1000 \text{ s}$, per un intervallo $t_2 - t_1 = 1 \text{ s}$, avremo

$$\beta = 1/2000 \quad \text{o} \quad v = \beta c = 300\,000/2000 = 150 \text{ km/s}.$$

Con misure sull'effetto Doppler, si sono ricavate velocità delle stelle rispetto al sistema solare dell'ordine di 20 km/s, fino a valori di 300 km/s per certi ammassi di stelle e nebulose a spirale. Va osservato però, che le misure astronomiche di tempo non hanno ancora raggiunto un'accuratezza sufficiente per apprezzare un ritardo nell'eclissi dei satelliti di Giove dell'ordine di 1 s o meno, nel corso di metà anno terrestre; non si può però escludere che un perfezionamento dei metodi di osservazione consenta di mettere in evidenza intervalli di tempo così piccoli.

Un ipotetico osservatore posto sul sole e a cui fosse noto il valore della velocità della luce nell'etere a riposo, sarebbe anche in grado di riconoscere lo stato di moto del sistema solare attraverso l'etere osservando le eclissi dei satelliti di Giove. Per far ciò, basterebbe misurare il ritardo nelle eclissi durante una rivoluzione di Giove nella sua orbita, servendosi della stessa formula $t_2 - t_1 = 2t_0\beta$, con la sola differenza che t_0 sarebbe il tempo impiegato dalla luce ad attraversare il diametro di quest'orbita. Questo valore di t_0 è circa 2,5 volte più grande del valore corrispondente all'orbita terrestre, e quindi $t_2 - t_1$ risulterà proporzionalmente maggiore; per la stessa ragione però, il tempo di rivoluzione di Giove, che è anche il tempo di osservazione di due eclissi consecutive, è molto più grande (circa 12 volte) dell'anno terrestre, cosicché questo metodo, che in linea di principio potrebbe anche essere seguito da un osservatore che si trovi sulla terra, non sembra troppo vantaggioso.

In ogni caso il fatto che con l'accuratezza che possiamo attualmente raggiungere non si sia mai osservato un ritardo di parecchi secondi, prova che la velocità del sistema solare rispetto all'etere non è molto più grande delle massime velocità conosciute dei moti relativi delle stelle.

Torniamo ora a occuparci dei metodi di misura della velocità della luce basati su osservazioni terrestri: non è difficile vedere perché essi non consentano alcuna conclusione sul moto della terra attraverso l'etere. Abbiamo già visto, accennando a questi metodi (p. 124) che la ragione principale è che la quantità che realmente si misura è una velocità media, poiché la luce ripete due volte lo stesso percorso avanti e indietro. Questa velocità differisce dalla velocità della luce nell'etere, di una quantità del secondo ordine in β , che non siamo quindi in grado di misurare. Infatti, detta l la lunghezza del percorso, la luce impiega un tempo pari a $l/(c-v)$ viaggiando nella direzione del moto della terra, e un tempo $l/(c+v)$ nella direzione opposta, per cui il tempo totale è

$$l \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

La velocità media è il rapporto fra $2l$ e questo tempo, cioè

$$\frac{c^2 - v^2}{c} = c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

e quindi differisce da c per una quantità del secondo ordine.

Oltre che nelle esperienze dirette a misurarne il valore, vi sono numerosi altri esperimenti in cui la velocità della luce ha un ruolo importante. Tutti i fenomeni di interferenza e di diffrazione sono ottenuti facendo sovrapporre fra loro in uno stesso punto onde luminose che percorrono differenti cammini ottici; i fenomeni di rifrazione alla superficie di separazione fra due mezzi sono dovuti al fatto che la luce si propaga in essi con velocità differenti. In generale il funzionamento di qualsiasi strumento ottico costituito di lenti, prisma, e simili, è condizionato dal valore di questa velocità. Ci chiediamo allora se non sia possibile realizzare un'esperienza in cui siano evidenti il moto della terra e il "vento d'etere" che essa produce nel suo moto.

In effetti, sono molti gli esperimenti coi quali si è cercato di scoprire questo moto; ma il risultato comune alle esperienze eseguite con sorgenti di luce sulla terra, è l'impossibilità di osservare la lievissima influenza dovuta al vento d'etere. È vero che nella maggioranza dei casi abbiamo a che fare con situazioni sperimentali che consentono di misurare soltanto quantità del primo ordine in β ; ma d'altra parte il costante fallimento di questi metodi è un'ovvia conseguenza del fatto che non si misura mai il tempo realmente impiegato dalla luce per andare da un punto ad un altro, ma solo somme o differenze dei tempi necessari alla luce per compiere un certo percorso avanti e indietro. In questo modo, come abbiamo visto, le quantità del primo ordine si cancellano sempre.

Possiamo viceversa sperare di ottenere un risultato positivo utilizzando una sorgente nello spazio, invece che sulla terra. Supponiamo di orientare un telescopio su una stella in un istante in cui la velocità v della terra punti nella stessa direzione (fig. 73): la velocità della luce nel vetro di cui sono formate le lenti del telescopio,

risulterà più grande di quella che si avrebbe se la terra fosse ferma, della quantità v . Ripetendo l'osservazione sulla stessa stella, dopo sei mesi, la velocità della luce nelle lenti risulterà più piccola della stessa quantità v . Ora, poiché l'indice di rifrazione del vetro dipende dalla velocità della luce, dobbiamo aspettarci che i fuochi delle lenti

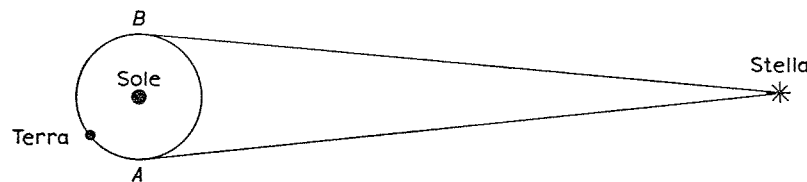


Fig. 73. Osservazione di una stella fissa da due posizioni diverse dell'orbita terrestre. Nel punto A la terra si avvicina alla stella; in B se ne allontana.

occupino differenti posizioni nei due casi. Si tratterebbe inoltre di un effetto del primo ordine, poiché la differenza fra le velocità della luce nei due casi sarebbe $2v$ ed il suo rapporto con la velocità nell'etere a riposo $2v/c = 2\beta$.

Arago eseguì effettivamente questo esperimento, ma non trovò alcuna variazione nella posizione dei fuochi. Vediamo come sia possibile spiegare questa discordanza.

Abbiamo supposto poco fa che la velocità della luce in un corpo in moto con velocità v in direzione opposta al raggio luminoso, sia maggiore per una quantità v di quella che si avrebbe in un corpo a riposo nell'etere. In altre parole, la nostra ipotesi consisteva nell'ammettere che i corpi materiali penetrino nell'etere senza trascinarlo troppo nel loro moto, esattamente come una rete appesa a un'imbarcazione trascina l'acqua.

I risultati sperimentali contraddicono manifestamente questa ipotesi, per cui dobbiamo ritenere che l'etere partecipi al moto dei corpi; il problema è soltanto di stabilire in che misura questo si verifichi.

Fresnel propose che per spiegare l'esperimento di Arago e tutti gli altri effetti del prim'ordine, fosse sufficiente supporre che l'etere

venisse solo parzialmente trascinato dai corpi. È appunto di questa teoria, che ha avuto una chiara conferma sperimentale, che vogliamo ora occuparci.

Stokes fu il primo (1845) ad adottare una posizione più radicale, affermando che l'etere partecipa totalmente al moto nell'interno della materia; egli pensava che la terra trascinasse con sé l'etere in essa contenuto, e che questo moto dell'etere decrescesse gradualmente verso le regioni estreme dello spazio, fino a raggiungere uno stato di quiete nell'universo. È chiaro allora che i fenomeni ottici debbano manifestarsi sulla terra come se questa fosse a riposo. La difficoltà di una simile teoria è nella necessità di formulare un'ipotesi particolare sul moto dell'etere, per spiegare come mai la luce proveniente dalla stella non subisca variazioni di direzione e di velocità nell'attraversare lo strato che separa l'etere dello spazio dall'etere trascinato dalla terra. Stokes fece un'ipotesi che tenesse conto di tutte le condizioni imposte dalle leggi dell'ottica; ma, come si vide in seguito, essa si dimostrò in contrasto con le leggi della meccanica. I numerosi tentativi fatti per risolvere le contraddizioni insite nella teoria di Stokes non ebbero alcun esito, ed essa sarebbe stata abbandonata anche se gli esperimenti di Fizeau (vedi p. 173) non avessero confermato la teoria di Fresnel.

L'idea di Fresnel di un parziale trascinamento dell'etere da parte della materia, non può essere illustrata facilmente dall'esperimento di Arago, poiché la rifrazione nelle lenti è un processo complicato che involve non solo la velocità delle onde, ma anche la loro direzione. Vi è però un esperimento equivalente, ma di più semplice comprensione, che fu proposto in seguito da Hoek (1868).

Il principio su cui si basa il funzionamento dell'apparato strumentale è quello dell'interferometro (fig. 74). Il raggio luminoso proveniente dalla sorgente Q colpisce lo specchio semiargentato P , inclinato di 45 gradi rispetto alla direzione del raggio, scindendosi in due parti. Il raggio riflesso (raggio 1) incide consecutivamente sugli specchi S_1 , S_2 e S_3 e ritorna su P , dove viene parzialmente riflesso nel telescopio F . Il raggio trasmesso (raggio 2) compie lo

stesso percorso in senso contrario e interferisce col raggio 1 nel campo di osservazione. Un corpo trasparente, per esempio un tubo W riempito d'acqua, viene posto successivamente fra S_1 ed S_2 , e l'intero apparato è montato in modo che la congiungente S_1 e S_2 abbia la stessa direzione, o la direzione opposta, del moto della terra

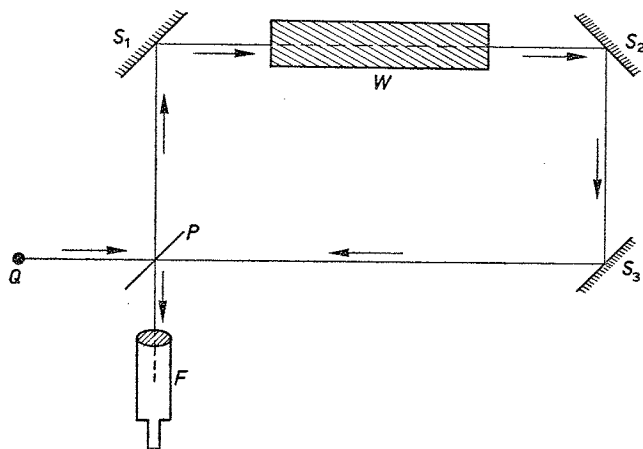


Fig. 74. L'interferometro usato da Hoek nel suo esperimento.

attorno al sole. Sia ora c_1 la velocità della luce nell'acqua supposta a riposo; questo valore è poco più piccolo della velocità nel vuoto e il rapporto fra i due $c/c_1 = n$ è chiamato *indice di rifrazione* dell'acqua. La velocità della luce nell'aria differisce di pochissimo da c , per cui l'indice di rifrazione dell'aria è praticamente uguale a 1. In effetti però l'acqua partecipa al moto orbitale della terra, e se l'etere interno ad essa non fosse minimamente trascinato durante questo moto, la velocità della luce nell'acqua relativa all'etere assoluto (nello spazio esterno), rimarrebbe invariata. Essa continuerebbe cioè a valere c_1 , mentre la velocità relativa alla terra di un raggio che si propagasse nella direzione del moto terrestre sarebbe $c_1 - v$. D'altra parte, se l'etere fosse trascinato completamente dall'acqua,

la velocità della luce relativa all'etere sarebbe $c_1 + v$, e c_1 la velocità relativa alla terra. Senza accettare nessuno di questi due punti di vista noi faremo l'ipotesi che la velocità della luce nell'acqua in moto rispetto all'etere assoluto sia poco più grande di c_1 , per esempio $c_1 + \phi$, e la velocità relativa alla terra valga $c_1 + \phi - v$; lasceremo quindi indeterminato il *coefficiente di trascinamento* ϕ , proponendoci di calcolarlo sperimentalmente. Il suo valore dovrà trovarsi ovviamente fra gli estremi zero, se non vi è alcun trascinamento, e v , nel caso di un trascinamento completo. Ammetteremo inoltre che il trascinamento dovuto all'aria sia trascurabile rispetto a quello che si ha nell'acqua.

Supponiamo che la lunghezza del tubo d'acqua sia l ; allora, se la terra si muove nel verso che va da S_1 a S_2 , il tempo impiegato dal raggio 1 per attraversare il tubo è $l/(c_1 + \phi - v)$, mentre per compiere lo stesso percorso nell'aria, nel tratto S_2P , il tempo impiegato è $l/(c + v)$. Diremo quindi che il raggio 1 percorre due cammini uguali, nell'acqua e nell'aria, nel tempo totale

$$\frac{l}{c_1 + \phi - v} + \frac{l}{c + v}.$$

Il raggio 2 viaggia in senso opposto e percorre la distanza l nell'aria nel tempo $l/(c - v)$ e nell'acqua nel tempo $l/(c_1 - \phi + v)$. Il tempo impiegato complessivamente per percorrere la stessa distanza nell'aria e nell'acqua è allora

$$\frac{l}{c_1 - \phi + v} + \frac{l}{c - v}.$$

L'esperimento mostra che se si ruota l'apparato in direzione opposta a quella della velocità della terra, o in qualunque altra direzione, le frange di interferenza non si spostano in modo apprezzabile. Questo ci permette di affermare che i raggi 1 e 2 impiegano tempi uguali, indipendentemente dalla posizione dell'apparato rispetto all'orbita terrestre, per cui potremo scrivere che

$$\frac{l}{c_1 + \phi - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{l}{c_1 - \phi + v} + \frac{l}{c - v}.$$

Da questa equazione possiamo calcolare ϕ ; trascurando i termini d'ordine superiore al primo, otteniamo *

$$\phi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad [44]$$

Questa è la famosa formula di trascinamento che fu ricavata da Fresnel con un procedimento differente dal nostro e più rigoroso. Prima di discuterne le implicazioni, osserviamo che essa stabilisce che il trascinamento è tanto maggiore quanto più l'indice di rifrazione supera il valore 1 che ha nel vuoto. Essa implica che, per esempio nell'aria dove c_1 è praticamente uguale a c , cioè $n \cong 1$, ϕ sia praticamente uguale a zero, come avevamo supposto. In accordo alla [44] la velocità della luce in un corpo in movimento, misurata rispetto all'etere assoluto è

$$c_1 + \phi = c_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v,$$

mentre la velocità misurata rispetto al corpo in moto vale

$$c_1 + \phi - v = c_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v - v = c_1 - \frac{v}{n^2}.$$

Quest'ultima relazione ci servirà per illustrare l'interpretazione di Fresnel: essa consiste essenzialmente nell'assumere che la densità

* Ricordando l'approssimazione fatta per piccoli β : $1/(1+\beta) \cong 1-\beta$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{c+v} \cong \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{c_1 + \phi - v} \cong \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{\phi - v}{c_1}\right)$$

e relazioni analoghe per le quantità a secondo membro. Da ciò si ottiene immediatamente

$$2\frac{\phi - v}{c_1^2} + 2\frac{v}{c^2} = 0,$$

e

$$\phi = \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2}\right)v = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v.$$

dell'etere in un corpo materiale, ρ_1 , sia differente dalla densità dell'etere libero, ρ .

Supponiamo che il corpo in movimento abbia la forma di una trave di sezione F , con il lato maggiore parallelo alla direzione del moto. In un tempo τ , durante questo moto attraverso l'etere, la sezione F avanza di un tratto $v \cdot \tau$ e trascina un volume $F \cdot v \cdot \tau$ (area della faccia moltiplicata per l'altezza) (fig. 75).

Questo volume, contenente una quantità di etere pari a $\rho \cdot F \cdot v \cdot \tau$, penetra nella trave attraverso la sua sezione frontale e assume una densità e una velocità differenti. La sua massa è ora $\rho_1 \cdot F \cdot v_1 \cdot \tau$ e potremo scrivere che

$$\rho_1 \cdot F \cdot v_1 \cdot \tau = \rho \cdot F \cdot v \cdot \tau$$

da cui

$$v_1 = v\rho/\rho_1.$$

Questo valore rappresenta in un certo senso l'intensità del vento d'etere nella trave in moto con velocità v . Un'onda luminosa, la cui velocità rispetto all'etere sia c_1 , avrà una velocità relativa al corpo pari a

$$c_1 - v_1 = c_1 - \frac{\rho}{\rho_1}v.$$

Ora, poiché secondo l'esperimento di Hoek, come abbiamo visto, la velocità della luce relativa a un corpo in movimento è

$$c_1 - \frac{1}{n^2}v,$$

avremo che

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{n^2} = \frac{c_1^2}{c^2}.$$

Il rapporto ρ_1/ρ , che misura la condensazione dell'etere nella materia, è quindi uguale al quadrato dell'indice di rifrazione.

Questa formula ci permette inoltre di affermare che l'elasticità dell'etere dev'essere la stessa per tutti i corpi. Dalla [37] sappiamo infatti che in ogni mezzo elastico $c^2 = p/\rho$; per cui la costante ela-

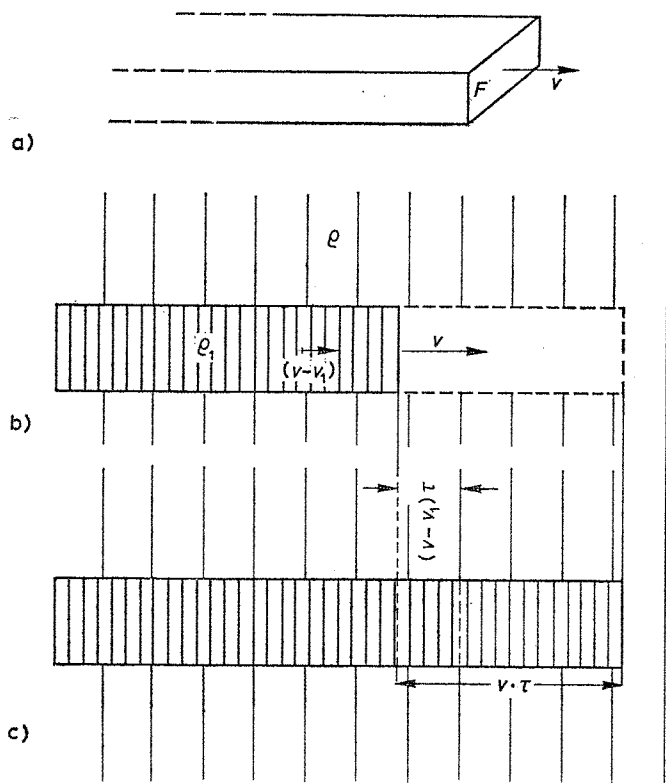


Fig. 75. a) Una trave, di sezione trasversale F , viaggia nell'etere con velocità v .
 b) La densità ρ dell'etere esterno alla trave è minore della densità ρ_1 dell'etere interno; ciò è rappresentato mediante tratteggi differenti. La velocità del corpo rispetto all'etere interno è v_1 mentre $v - v_1$ è la velocità relativa all'etere esterno.
 c) Nel tempo τ l'etere interno si è spostato di un tratto $\tau(v - v_1)$ a partire dalla linea tratteggiata. Nello stesso tempo la quantità di etere $\rho \cdot v \cdot \tau F$, contenuta nel volume tratteggiato di figura 75b è confluita all'interno della trave dove la sua densità è ρ_1 e la velocità v_1 . Quindi il flusso dell'etere esterno $\rho \cdot v \cdot \tau \cdot F$ deve compensare esattamente l'aumento dell'etere interno $\rho_1 \cdot v_1 \cdot \tau \cdot F$.

stica sarà $p = c^2 \rho$ per l'etere, e $p_1 = c_1^2 \rho_1$, per la materia. La relazione ora trovata stabilisce che queste due quantità sono esattamente uguali.

L'interpretazione meccanica del coefficiente di trascinamento dovuta a Fresnel, ha esercitato una grande influenza sull'elaborazione della teoria elastica della luce. Non dobbiamo nascondersi però come essa dia adito ad alcune consistenti obiezioni. È ben noto che raggi di luce di diverso colore (frequenza) hanno indici di rifrazione n differenti, cioè differenti velocità; è chiaro allora come il coefficiente di trascinamento debba avere un valore diverso a seconda del colore della luce. Ciò è incompatibile con l'interpretazione di Fresnel, poiché l'etere dovrebbe fluire in un corpo con velocità variabili in funzione della frequenza. Vi dovrebbero essere cioè tante specie d'etere quanti sono i colori, e questo è sicuramente impossibile.

Tuttavia la formula di trascinamento [44] non è basata sull'interpretazione meccanica di Fresnel, ma soltanto sui risultati sperimentali. In seguito, studiando la teoria elettromagnetica, vedremo che

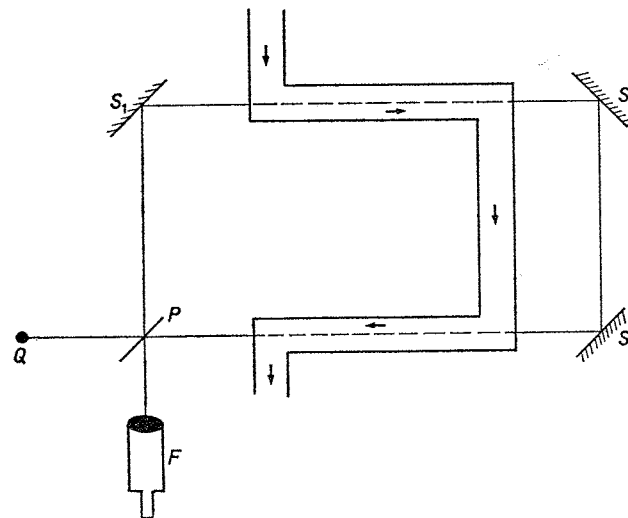


Fig. 76. Esperimento di Fizeau per determinare il coefficiente di trascinamento.

essa può essere dedotta in base a nozioni di struttura atomica della materia e di elettricità.

È estremamente difficile verificare la formula di Fresnel con esperimenti eseguiti sulla terra, poiché ciò richiederebbe che la sostanza trasparente raggiungesse velocità molto elevate. Il successo dell'esperimento di Fizeau (1851) è dovuto all'uso di un apparato d'interferenza molto sensibile.

L'interferometro usato è abbastanza simile a quello di Hoek, con la differenza che la luce compie ambedue i percorsi S_1S_2 e S_3P in un tubo riempito d'acqua; inoltre esso è costruito in modo tale che il raggio 1 viaggi nella direzione del moto dell'acqua e il raggio 2 in direzione opposta. Fizeau studiò in che misura la luce era trascinata dall'acqua in movimento, osservando lo spostamento delle frange d'interferenza dovuto a un aumento della velocità dell'acqua. Lo spostamento effettivamente trovato si rivelò molto più piccolo di quello corrispondente a un trascinamento completo, e accurate misure dimostrarono un perfetto accordo con la [44].

10. Aberrazione

Vogliamo ora discutere quale influenza abbia il moto dei corpi sulla direzione dei raggi luminosi, riferendoci in modo particolare alla possibilità di riconoscere lo stato di moto della terra attraverso l'etere dall'osservazione dei fenomeni che si verificano al variare della direzione della luce. Anche in questo caso dovremo fare una distinzione tra sorgenti di luce astronomiche e sorgenti terrestri.

Come abbiamo già visto studiando l'aberrazione dal punto di vista della teoria corpuscolare (p. 122), essa consiste in una deflessione apparente della luce stellare che raggiunge la terra. La spiegazione che in quel caso era stata molto semplice, si presenta ora dal punto di vista della teoria ondulatoria più complicata, poiché è facile vedere che non vi può essere deflessione nel caso di onde piane. Supponiamo per semplicità che i raggi si propaghino perpendicolarmente al moto dell'osservatore, poiché in tal caso egli

riceve le onde piane parallele al suo moto (fig. 77). Consideriamo un sistema a riposo S ed un sistema S' in movimento nella direzione degli assi x e x' , e supponiamo di ricevere le onde, supposte in moto nella direzione y , nei due punti P_0 e P_1 . Dalla [38] sappiamo che il

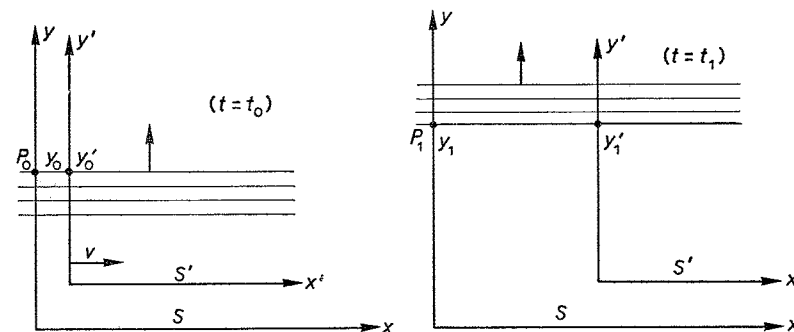


Fig. 77. Un treno d'onde che viaggia nella direzione dell'asse y è osservato da due sistemi di riferimento S e S' in moto relativo nella direzione x .

numero d'onda n è un invariante e possiamo scrivere che

$$n = \nu \left(t_1 - t_0 - \frac{y_1 - y_0}{c} \right) = \nu' \left(t_1 - t_0 - \frac{y'_1 - y'_0}{c'} \right),$$

dove y_1, y_0, y'_1, y'_0 sostituiscono x_1, x_0, x'_1, x'_0 poiché le onde viaggiano parallelamente all'asse y . Ricordiamo inoltre che per la [29] la trasformazione di Galileo che connette S ad S' è $x' = x - vt$, $y' = y$. Siamo ora in grado di calcolare le grandezze fondamentali delle onde, con il metodo introdotto al paragrafo 8 di questo capitolo. Misuriamo innanzitutto n in un punto fisso, cioè per $P_0 = P_1$ e $y_1 - y_0 = y'_1 - y'_0 = 0$; e otteniamo $\nu = \nu'$. Successivamente, da una misura a tempo fisso $t_1 = t_0$, possiamo ricavare $\nu(y_1 - y_0)/c = \nu'(y'_1 - y'_0)/c'$. Ma la trasformazione di Galileo impone $y_1 - y_0 = y'_1 - y'_0$, per cui $\nu/c = \nu'/c'$; poiché $\nu = \nu'$ otterremo in conclusione $c = c'$.

L'osservatore in moto vede quindi un'onda della stessa frequenza,

velocità e direzione; se infatti la direzione fosse cambiata, il numero d'onda in S' dovrebbe dipendere, oltre che da y' , anche da x' .

Sembrirebbe allora che la teoria ondulatoria non sia in grado di spiegare il semplice fenomeno dell'aberrazione, già noto circa duecento anni fa.

Ma in realtà la situazione non è così sfavorevole come ciò lascerebbe pensare; la ragione dell'insuccesso delle precedenti argomentazioni è da vedere nel fatto che gli strumenti ottici con cui eseguiamo le osservazioni, e fra questi anche l'occhio, non hanno il compito di stabilire la posizione dell'onda che arriva, ma svolgono piuttosto una funzione totalmente differente.

Il compito dell'occhio o del cannocchiale consiste nel tradurre in immagine i raggi emessi da un corpo luminoso. In questo processo, le onde luminose trasportano parte dell'energia di vibrazione delle particelle del corpo alle corrispondenti particelle dell'immagine; il percorso lungo il quale avviene questo trasporto di energia è appunto il raggio luminoso. L'energia però, secondo le leggi di conservazione, è una quantità che può essere trasferita e subire trasformazioni, ma non può essere creata o distrutta. Sembra quindi ragionevole applicare le leggi della teoria corpuscolare al moto dell'energia. In effetti il semplice procedimento con cui in precedenza abbiamo ottenuto la formula dell'aberrazione, è sufficientemente corretto se definiamo il raggio luminoso come il cammino lungo il quale si trasferisce l'energia delle onde e applichiamo ad esse le leggi del moto relativo, considerandole come fasci di particelle emesse.

La stessa formula può essere ottenuta anche senza ricorrere all'idea del raggio luminoso come percorso dell'energia, ma seguendo le rifrazioni che ogni singola onda subisce nelle lenti o nei prismi degli strumenti ottici. Per far questo però dovremmo conoscere un'esatta teoria del trascinamento dell'etere. L'idea di Stokes di un trascinamento completo non può spiegare l'aberrazione se non introducendo delle ipotesi poco plausibili sul moto dell'etere, e abbiamo già visto quali difficoltà si incontrano in questo caso. La teoria di Fresnel enuncia una legge della rifrazione della luce alla super-

ficie di un corpo in movimento, che permette di ottenere esattamente la formula dell'aberrazione. Il risultato finale non dipende infatti dalla sostanza del corpo che è attraversato dalla luce, anche se il coefficiente di trascinamento è diverso per ogni sostanza. Questo fatto fu verificato sperimentalmente da Airy (1871), che dimostrò come non vi fosse alcuna variazione dal valore normale dell'aberrazione se l'esperienza era eseguita con il telescopio riempito d'acqua. Naturalmente l'aberrazione non è più un effetto del prim'ordine se l'onda luminosa e l'osservatore non sono in moto fra loro; è per questo che tutti gli esperimenti ottici eseguiti con una sorgente di luce sulla terra non presentano alcuna deviazione dei raggi attraverso il vento d'etere. La teoria di Fresnel è in grado di spiegare questi fatti, in accordo con i risultati sperimentali; ma non riteniamo necessario soffermarci su questi particolari.

11. *Riepilogo e ulteriore sviluppo della teoria*

Abbiamo considerato l'etere luminoso come una sostanza che si comporta secondo le leggi della meccanica; per essa vale la legge d'inerzia e quindi, in assenza di materia, come nello spazio astronomico, è a riposo rispetto a un appropriato sistema inerziale. D'altra parte, anche se scegliamo un sistema inerziale diverso per ogni fenomeno, le leggi che regolano i moti dei corpi e dell'etere, oltre alle leggi della propagazione luminosa, non variano, almeno per ciò che concerne le accelerazioni e gli effetti delle forze reciproche. Sappiamo infatti che la velocità e la direzione del moto assumono valori differenti in funzione del sistema in cui sono misurate, poiché ogni corpo in moto rettilineo può essere considerato a riposo con la semplice scelta di un sistema di riferimento appropriato, cioè del sistema solidale con esso. In questo senso abbastanza limitato deve essere valido per l'etere, trattato come una sostanza materiale, il principio di relatività galileiano.

In conseguenza di ciò tuttavia, velocità e direzione dei raggi luminosi sono differenti in ogni sistema inerziale. Dovremmo quindi

pensare che sia possibile riconoscere lo stato di moto della terra o del sistema solare osservando sulla terra quei fenomeni ottici che dipendono dalla velocità e dalla direzione della luce. Ma tutti gli esperimenti fatti a questo scopo hanno dato risultati negativi. È chiaro allora che velocità e direzione della luce sono indipendenti dal moto del corpo celeste sul quale si eseguono le osservazioni, o, in altri termini, che i fenomeni ottici dipendono soltanto dai moti relativi dei corpi.

Questo principio di relatività, che sembra abbastanza simile al principio di relatività della meccanica classica, ha in realtà un significato diverso perché si riferisce alle velocità e alle direzioni del moto, che in meccanica non sono indipendenti dal moto del sistema di riferimento.

Possiamo seguire a questo punto due diversi orientamenti. Il primo è basato sull'ipotesi che le osservazioni dei fenomeni ottici introducano dei concetti completamente nuovi, ossia che la luce si comporti in modo diverso dalla materia riguardo alla direzione e alla velocità del moto. Se riteniamo che le osservazioni sperimentali costituiscano delle prove convincenti, non possiamo che seguire un simile orientamento rinunciando a qualsiasi ipotesi sulla *natura* dei fenomeni luminosi. Come vedremo, questa posizione fu accolta definitivamente da Einstein; essa richiedeva, tuttavia, un'estrema libertà dalle convenzioni della teoria tradizionale cui si arrivò solo quando l'insieme di tutte le ipotesi aveva raggiunto un tal grado di complessità che l'unica soluzione possibile era quella di eliminarle radicalmente.

Peraltro nella nostra precedente discussione ci siamo limitati a considerare quel periodo storico che vide il più florido sviluppo della teoria dell'etere meccanico. Il principio della relatività dei fenomeni ottici era giudicato un fatto secondario, in un certo senso casuale, dovuto alla compensazione di cause agenti in direzioni opposte. La possibilità di superare in questo modo le difficoltà di interpretazione dei fenomeni ottici era legata, piuttosto, all'introduzione di ipotesi aggiuntive sul moto dell'etere e sulle azioni che i corpi in movimento esercitano su esso. Il risultato principale dell'ipotesi di

Fresnel sul trascinamento fu appunto di introdurre nella teoria il principio della relatività dei fenomeni ottici, sia pure limitatamente alle quantità del primo ordine. Finché le misurazioni ottiche non raggiunsero la precisione necessaria per apprezzare quantità del second'ordine, questa teoria fu in grado di dare una risposta a tutti i quesiti posti dagli esperimenti, con una sola eccezione alla quale, stranamente, si prestò pochissima attenzione. D'altra parte, se la precisione delle misure astronomiche avesse consentito di trovare che, osservando le eclissi dei satelliti di Giove con il vecchio metodo di Römer (vedi p. 120), non era possibile rivelare alcuna influenza sulla velocità della luce dovuta al moto del sistema solare, la teoria dell'etere si sarebbe certamente trovata ad affrontare un problema insolubile. È chiaro infatti che nessuna ipotesi sul trascinamento dell'etere avrebbe spiegato questo effetto del prim'ordine.

È evidente quindi come sia importante riuscire a valutare sperimentalmente la dipendenza dei fenomeni ottici dal moto della terra, fino ai termini del secondo ordine. Soltanto risolvendo questo problema è possibile stabilire se il principio della relatività dei fenomeni ottici vale rigorosamente o solo in modo approssimato. Nel primo caso la teoria di Fresnel non sarebbe più accettabile e ci troveremmo di fronte a una situazione completamente nuova.

Storicamente, ciò si verificò 100 anni dopo Fresnel, e nel periodo intermedio la teoria dell'etere si sviluppò in altre direzioni. Fin dal principio infatti non esisteva un solo etere, ma tutta una serie di sostanze diverse: un etere ottico, uno termico, uno elettrico, uno magnetico, che servissero come mezzo per la propagazione nello spazio di qualsiasi fenomeno. All'inizio si pensò che fra tutte queste sostanze non esistesse alcuna connessione, ed esse fossero situate indipendentemente fra loro in regioni contigue nello spazio. Queste idee naturalmente non durarono a lungo, poiché si vide ben presto che vi erano stretti rapporti fra fenomeni appartenenti a diversi campi della fisica. Nacque così l'idea di un unico etere capace di trasmettere tutti i fenomeni fisici che avvengono nello spazio vuoto. Si capì, ad esempio, che la luce consisteva di una vibrazione elettromagnetica

e che il suo "etere" era lo stesso che trasmetteva le forze elettriche e magnetiche. Queste scoperte diedero un'ulteriore conferma alla teoria e l'etere fu identificato con lo spazio newtoniano. Esso doveva trovarsi in uno stato di quiete assoluta e, oltre a trasmettere le vibrazioni elettromagnetiche, doveva generare indirettamente le forze d'inerzia e le forze centrifughe.

Ci occuperemo ora dello sviluppo di questa teoria, che, in un certo senso, può ricordare un procedimento giudiziario. L'etere ricopre il ruolo dell'imputato contro cui si accumulano indizi schiacciati finché l'innegabile esistenza di un alibi, cioè l'esperimento di Michelson e Morley sulle quantità del secondo ordine e l'interpretazione datane da Einstein, porrà fine all'intero dibattito.

5.

Le leggi fondamentali dell'elettrodinamica

1. *Elettrostatica e magnetostatica*

Il fatto che un certo tipo di minerale, la magnetite, attragga il ferro, e che l'ambra strofinata (*elektron* in Greco) attragga e trattenga i corpi leggeri, era già noto agli antichi. Tuttavia lo studio dell'elettricità e del magnetismo hanno avuto origine in tempi più recenti, in cui Galileo e Newton avevano insegnato a compiere sulla natura indagini razionali mediante il ricorso all'esperienza.

I risultati fondamentali sui fenomeni elettrici, che ora ricapitoleremo brevemente, furono stabiliti dopo l'anno 1600. A quel tempo il solo mezzo di produzione degli effetti elettrici era lo strofinio. Gray scoprì (1729) che i metalli, quando venivano messi a contatto con corpi che erano stati elettrizzati per strofinio, acquistavano anch'essi proprietà simili; egli mostrò, inoltre, che i metalli conducono l'elettricità. Questo portò alla classificazione delle sostanze in *conduttori* e *non conduttori (isolanti)*. Du Fay (1730) scoprì che l'azione elettrica non è sempre *attrattiva*, ma può anche essere *repulsiva*, e per spiegare ciò postulò l'esistenza di due fluidi (chiamati oggi *elettricità positiva* e *negativa*, rispettivamente) e stabili che corpi aventi cariche dello stesso segno si respingono, mentre corpi con cariche opposte si attraggono.

Dobbiamo ora definire il concetto di *carica elettrica* da un punto di vista quantitativo. A tale scopo non seguiremo l'evoluzione storica, spesso tortuosa, delle argomentazioni che condussero all'enunciazione dei concetti e delle leggi, ma sceglieremo una serie di definizioni e di esperimenti da cui emerge chiaramente la successione logica.

Immaginiamo un corpo M che in qualche modo sia stato elettrizzato per strofinio; esso sarà in grado di attrarre o di respingere altri corpi elettrizzati. Per studiare questa azione considereremo dei piccoli corpi di prova, ad esempio delle sfere il cui diametro sia molto piccolo rispetto alla minima distanza alla quale possono avvicinarsi al corpo M . Se poniamo nelle vicinanze di M un corpo di prova P , su P agisce una forza statica di intensità e direzione definite, misurabile con esperienze di tipo meccanico; si può, ad esempio, bilanciare tale forza con un peso, servendosi di leve o di fili: qualitativamente si trova che la *forza diminuisce al crescere della distanza PM* .

Prendiamo successivamente due corpi di prova, P_1 e P_2 , e portiamoli a turno nello stesso punto nelle adiacenze di M ; misuriamo poi in ciascun caso le forze F_1 e F_2 , in grandezza e direzione. Adotteremo d'ora in poi la *convenzione* secondo cui si considerano *forze opposte* quelle che hanno la stessa direzione e *segni opposti*. L'esperienza mostra che le due forze F_1 e F_2 hanno la stessa direzione, ma possono avere grandezze e segni diversi.

Portiamo ora i due corpi di prova in un punto diverso, sempre nei pressi di M , e misuriamo di nuovo le forze, F'_1 e F'_2 , in grandezza e direzione: le forze hanno ancora la stessa direzione, ma in generale sono diverse in grandezza e segno.

Se consideriamo il rapporto $F_1:F_2$ delle forze nel primo punto, e il rapporto $F'_1:F'_2$ nel secondo punto, si trova che essi hanno lo stesso valore, che può essere positivo o negativo:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F'_1}{F'_2}.$$

Possiamo da ciò concludere quanto segue:

- 1) la direzione della forza esercitata da un corpo elettrizzato M su un piccolo corpo di prova P , non dipende affatto dalla natura e dalla quantità di elettricità del corpo di prova, ma solo dalle proprietà del corpo M ;
- 2) il rapporto delle forze esercitate su due corpi di prova posti successivamente nello stesso punto, è del tutto indipendente dalla scelta

del punto, cioè dalla posizione, dalla natura e dallo stato elettrico del corpo M ; esso dipende solo dalle proprietà dei corpi di prova.

Scegliamo ora un corpo di prova ben definito, elettrizzato in un determinato modo, e assumiamo la sua carica come unità di carica, o di quantità di elettricità, q . Servendoci di questo corpo di prova, misuriamo la forza F_q esercitata dal corpo M in punti diversi. Questa determina allora anche la direzione della forza F esercitata su un qualsiasi altro corpo di prova P ; il rapporto F/F_q , tuttavia, dipende solo dal corpo di prova P e definisce il rapporto e fra la carica elettrica di P e l'unità di carica q . Esso può essere positivo o negativo a seconda che le forze F e F_q abbiano la stessa direzione o direzioni opposte.

Avremo perciò in ogni punto $F/e = F_q/q$, e da ciò si può concludere che F/e dipende soltanto dallo stato elettrico del corpo M . Al quoziente $F/e = F_q/q$ daremo allora il nome di *intensità del campo elettrico E* . La quantità E descrive l'azione elettrica di M nello spazio circostante, o, come si dice di solito, il suo *campo elettrico*. Da $F/e = E$ segue che

$$F = eE. \quad [45]$$

Come nel caso della scelta della carica unitaria, è in pratica quasi impossibile fissare, per la scelta del campo unitario, delle norme riguardanti l'elettrizzazione di un ben definito corpo di prova; sarebbe preferibile una definizione di carattere meccanico, cui si può giungere nel seguente modo: forniamo innanzitutto ai due corpi di prova delle cariche uguali (adotteremo il criterio secondo cui due cariche sono uguali quando, poste in uno stesso punto nell'intorno di un terzo corpo M , sono soggette alla stessa forza). I due corpi si respingeranno quindi con la stessa forza; diremo che le loro cariche sono uguali all'unità di carica q , se essi si respingono con una forza unitaria quando la distanza fra i due corpi è uguale all'unità di lunghezza. Per ora non si fa nessuna ipotesi sulla dipendenza della forza dalla distanza.

Mediante tale definizione, la quantità di elettricità (o carica elet-

trica) diventa una grandezza misurabile, allo stesso modo in cui lo sono la massa, la lunghezza e la forza.

La legge più importante relativa alle cariche elettriche, enunciata indipendentemente da Watson e Franklin nel 1747, è che in ogni processo elettrico si formano sempre uguali quantità di elettricità positiva e negativa. Se, ad esempio, strofiniamo una bacchetta di vetro con un pezzo di seta, il vetro si carica positivamente, e un'uguale quantità di elettricità, negativa, si ritrova nella seta.

Questo risultato empirico può essere interpretato dicendo che i due tipi di elettricità *non* sono *generati* per strofinio, ma vengono *soltanto separati*, e possono essere considerati come due *fluidi* presenti in tutti i corpi in quantità uguali. Nei corpi "neutri", non elettrizzati, essi sono sempre presenti nella stessa quantità, di modo che i loro effetti esterni si bilanciano. Nei corpi elettrizzati essi sono separati: si ha, ad esempio, che una parte di elettricità positiva è fluita da un corpo all'altro, così come si ha il passaggio della stessa quantità di elettricità negativa nella direzione opposta.

È chiaro però che basta supporre l'esistenza di *un* solo fluido in grado di fluire indipendentemente dalla materia. Attribuiremo allora alla materia, priva di tale fluido, una carica definita, ad esempio positiva, e al fluido la carica opposta, negativa; il processo di elettrizzazione consiste allora nel passaggio del fluido negativo da un corpo all'altro, cosicché il primo corpo si carica positivamente, in quanto la carica positiva della materia non è più completamente compensata, mentre il secondo corpo si carica negativamente, avendo un eccesso di fluido negativo.

Il contrasto tra i fautori di queste due ipotesi, cioè della teoria a un fluido e di quella a due fluidi, durò per molto tempo, e, naturalmente, fu del tutto inutile e infruttuoso, finché non intervenne la scoperta di nuovi fenomeni a dare una risposta definitiva sull'argomento. Non entreremo nel vivo di tali discussioni, ma parleremo brevemente delle differenze caratteristiche che si riscontrarono nel comportamento dei due tipi di elettricità. Tali differenze indicavano che l'elettricità positiva è in realtà legata stabilmente alla materia,

mentre quella negativa può muoversi in essa più o meno liberamente. Questa teoria è valida ancor oggi, e ne ripareremo nel considerare la teoria degli elettroni.

Un'altra controversia sorse sul modo di definire la trasmissione nello spazio delle forze elettriche di attrazione e di repulsione. I primi tentativi di ricerche sull'elettricità si ebbero prima che fosse formulata la teoria newtoniana dell'attrazione; allora l'idea di un'azione a distanza era ritenuta inconcepibile, e si prestava ancor fede a ipotesi di natura metafisica, quale, ad esempio, che la materia potesse agire solo nei punti in cui è effettivamente presente. Le più disparate congetture furono introdotte per spiegare le forze elettriche, e una di queste supposeva l'esistenza di un "flusso" emesso dai corpi carichi, in grado di esercitare una pressione sugli altri corpi. Tuttavia, una volta affermatasi la teoria della gravitazione di Newton, il concetto di forza agente a distanza entrò gradualmente nel modo di pensare abituale. Infatti quando una certa idea si imprime così radicalmente nella nostra mente da essere considerata un fondamentale principio esplicativo essa diviene un modo di pensare abituale. Non è difficile allora che la speculazione metafisica, spesso ammantata di vesti filosofiche, sancisca la necessità logica di un principio, corretto o semplicemente accettato, e neghi la possibilità del suo opposto. Fortunatamente, la scienza non ha in genere simili preoccupazioni, e di fronte all'evidenza sperimentale è spesso disposta ad accettare un punto di vista precedentemente rifiutato. Lo studio delle forze elettriche e magnetiche si sviluppò appunto secondo uno schema di questo tipo. Alla teoria iniziale dell'azione diretta basata su presupposti metafisici, seguì una teoria di azione a distanza fondata sul modello di Newton; successivamente, di fronte alla scoperta di nuovi fatti sperimentali, si ritornò una seconda volta all'idea di un'azione per contatto. Questo continuo ondeggiare fra differenti punti di vista non è però un indizio di debolezza, poiché ciò che è veramente essenziale non è il modello di una teoria, ma le conoscenze sperimentali su cui essa è costruita e le loro relazioni concettuali. In realtà, ad un esame più attento, queste ultime non rivelano alcuna

modifica sostanziale, e mettono in evidenza, piuttosto, uno sviluppo continuo e una intrinseca compatibilità. Dobbiamo osservare d'altra parte che, se i tentativi teorici precedenti l'epoca di Newton sono evidentemente trascurabili, per l'effettiva povertà di dati sperimentali disponibili a quel tempo, sicuramente insufficienti a rappresentare un concreto punto di partenza, la teoria di un'azione per contatto, nell'ambito della meccanica newtoniana, si era sviluppata su una solida base empirica. Considerato il livello raggiunto dalle conoscenze sperimentali nel diciottesimo secolo, le ricerche teoriche sulle forze elettriche e magnetiche non potevano che approdare a una teoria dell'azione a distanza; questa ipotesi, d'altra parte, mantiene ancor oggi una certa validità, e, se usata in modo appropriato, conduce a risultati corretti.

Il primo a concepire l'idea che le forze elettriche agiscano a distanza come la forza gravitazionale fu Epino nel 1759, il quale, se non riuscì a formulare correttamente la legge sulla dipendenza delle azioni elettriche dalla distanza, fu però in grado di spiegare, almeno qualitativamente, il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Tale fenomeno consiste nella proprietà dei corpi carichi di agire attrattivamente non solo su altri corpi pure dotati di carica, ma anche su quelli elettricamente neutri e in particolare sulle sostanze conduttrici: una carica di segno opposto è indotta sulla parte del corpo influenzato più vicina al corpo carico, mentre una carica dello stesso segno si manifesta sulla parte più lontana (fig. 78); è chiaro quindi che, poiché le forze decrescono all'aumentare della distanza, l'azione attrattiva deve prevalere su quella repulsiva.

La legge esatta di tale decremento fu presumibilmente trovata per la prima volta da Priestley, noto per la sua scoperta dell'ossi-

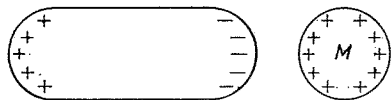


Fig. 78. Un corpo carico M induce delle cariche su di un altro corpo inizialmente scarico.

geno (1767). Egli si servì di un ingegnoso procedimento indiretto, ancor più convincente di una vera e propria misura. Nel 1771 anche Cavendish, indipendentemente da Priestley ma con un procedimento analogo, arrivò ad una corretta formulazione di questa legge, che però ricevette infine il nome del fisico Coulomb (1785), il quale per primo ne diede una prova diretta, misurando effettivamente la forza.

Il ragionamento di Priestley e di Cavendish si sviluppava sostanzialmente in questo modo: dal momento che due cariche dello stesso segno si respingono, le cariche elettriche possedute da un conduttore non possono distribuirsi nel suo interno, ma devono tendere a portarsi sulla superficie esterna in modo da realizzare una situazione di equilibrio. Ora, gli esperimenti dimostrano con assoluta certezza che nessun campo elettrico esiste nello spazio circondato da un involucro metallico, per quanto alta sia la carica dell'involucro stesso; le cariche devono quindi distribuirsi sulla superficie che racchiude lo spazio vuoto in modo che nessuna forza venga ad agire nella regione interna. Se la cavità ha la forma di una sfera, la carica, per ragioni di simmetria, può distribuirsi solo sulla superficie sferica in modo uniforme. Detta q la carica distribuita sull'unità di superficie (densità di carica), le quantità di elettricità possedute dai due elementi f_1 ed f_2 saranno qf_1 e qf_2 , e quindi f_1 eserciterà su un corpo di prova P , situato nell'interno della sfera e dotato della carica e , una forza $F_1 = (eqf_1/q^2)R_1$, dove R_1 è la forza agente fra due cariche unitarie q poste in P e f_1 ; R_1 deve dipendere, ovviamente, dalla distanza r_1 fra P ed f_1 . Ad ogni elemento di superficie f_1 , ne corrisponde uno opposto f_2 , formato dalle intersezioni sulla superficie sferica delle congiungenti i punti del contorno di f_1 con P : f_1 ed f_2 rappresentano quindi due sezioni intercettate sulla sfera da un doppio cono con vertice in P (fig. 79), e gli angoli fra esse e gli assi del cono sono uguali. Deve valere allora la relazione fra le aree f_1 ed f_2 e i quadrati delle distanze da P :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Analogamente, la carica qf_2 posta in f_2 esercita su P una forza $F_2 = (eqf_2/q^2)R_2$, con R_2 funzione di r_2 ; F_2 è diretta naturalmente in verso opposto a F_1 , e il punto P non è soggetto ad alcuna azione solo se le forze dovute a due elementi di superficie opposti sono

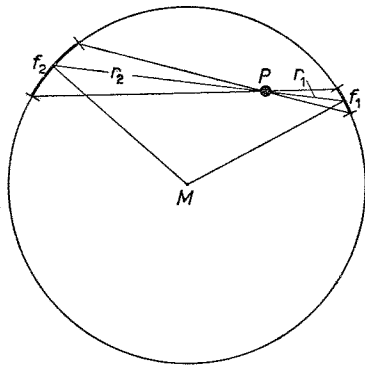


Fig. 79. Derivazione della legge di Coulomb.

esattamente in equilibrio, cioè quando $F_1 = F_2$. Per ragioni di semplicità, accetteremo senz'altro questa affermazione, anche se non sarebbe difficile darne una dimostrazione rigorosa. Sarà allora $f_1 R_1 = f_2 R_2$, cioè

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

e quindi

$$R_1 r_1^2 = R_2 r_2^2 = C,$$

dove C è una quantità indipendente dalla distanza. Diremo allora in generale che fra due cariche unitarie poste a distanza r si esercita una forza $R = C/r^2$ e quindi la forza F agente fra due cariche e_1 ed e_2 alla stessa distanza r deve essere

$$F = \frac{C}{r^2} \frac{e_1 e_2}{q^2}.$$

Conformemente alle nostre convenzioni sull'unità di carica elettrica, scriveremo $C = 1 \times \text{unità di forza} \times (\text{unità di lunghezza})^2$, e le dimensioni della carica saranno fissate ponendo $C = q^2$. Con questa convenzione la forza con cui due cariche e_1 ed e_2 poste alla distanza r si attraggono o si respingono è

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad [46]$$

Nella formulazione di questa legge, nota come *legge di Coulomb*, è ovviamente necessario supporre che le dimensioni dei corpi carichi siano piccole rispetto alla loro distanza reciproca; come nel caso della gravitazione, anche qui abbiamo a che fare con una legge in qualche modo ideale. Essa può essere però generalizzata al caso di una forza dovuta a un corpo di estensione finita; a tal fine, basta pensare che l'elettricità si distribuisca sulla superficie in tante zone elementari, e sommare gli effetti che tutte le particelle di un corpo esercitano sull'altro.

Le dimensioni della quantità di elettricità fissate dalla [46], sono

$$[e] = [l\sqrt{F}] = \left[l \sqrt{\frac{ml}{t^2}} \right] = \left[\frac{l\sqrt{ml}}{t} \right],$$

che nel sistema C.G.S. diventano $\frac{\text{cm} \sqrt{\text{g cm}}}{\text{s}}$.

L'intensità del campo elettrico E , definita dalla $F = eE$, ha dimensioni

$$[E] = \left[\frac{F}{e} \right] = \left[\frac{F}{l\sqrt{F}} \right] = \left[\frac{\sqrt{F}}{l} \right] = \left[\frac{\sqrt{ml}}{lt} \right] = \left[\frac{1}{t} \sqrt{\frac{m}{l}} \right],$$

e la sua unità è $\frac{1}{\text{s}} \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{cm}}}$.

La legge di Coulomb ha avuto un'importanza fondamentale per lo sviluppo dell'elettrostatica, che assunse il carattere di scienza solo dopo che tale legge fu definitivamente stabilita. Dal punto di vista matematico, il problema principale dell'elettrostatica consiste

nel trovare la distribuzione di carica su un insieme di conduttori sottoposti a reciproca influenza, e le forze dovute a tali cariche, nota la quantità di elettricità posseduta da ogni conduttore. Il grande interesse di questo problema è nel fatto che esso porta immediatamente a superare la formulazione iniziale basata sulla teoria dell'azione a distanza, con l'ipotesi di un'azione pseudocontigua, il che significa, nel linguaggio della matematica, sostituire alle somme su tutte le forze di Coulomb, equazioni differenziali nell'incognita campo elettrico E , o una quantità ad esso connessa, il potenziale. Si tratta di questioni di carattere essenzialmente matematico alla cui soluzione contribuirono scienziati come Laplace (1782), Poisson (1813), Green (1828), Gauss (1840), ma che esulano dai nostri scopi. Ci limiteremo quindi a mettere in evidenza che questa trattazione dei fenomeni elettrostatici, generalmente nota come teoria del potenziale, non è una vera e propria teoria dell'azione per contatto (nel significato che a questa espressione abbiamo dato nel cap. 4, p. 129), ma piuttosto una teoria d'azione a distanza istantanea, poiché in essa non si introduce il concetto di velocità di propagazione finita. Le equazioni differenziali usate si riferiscono infatti solo a variazioni dell'intensità del campo nello spazio, e non nel tempo.

La teoria del magnetismo si sviluppò in modo abbastanza analogo, e perciò non richiederà da parte nostra una trattazione molto estesa.

Anche per i *poli* di un *ago magnetico*, cioè per i punti in cui sembrano concentrarsi le forze magnetiche, vale la legge che polarità dello stesso segno si attraggono e polarità di segno opposto si respingono. Se una calamita viene spezzata in un punto qualunque della sua lunghezza, le parti ottenute non posseggono cariche opposte, ma mostrano ai nuovi estremi poli di segno contrario, e per quante volte si ripeta questa esperienza, ciascun pezzetto è sempre una calamita completa, cioè possiede due poli di segno contrario.

Possiamo concludere quindi che, come nel caso dell'elettricità, esistono due specie di magnetismo, esse però non possono muoversi liberamente e sono presenti in quantità uguali, ma separate da distanze infinitesime, anche nelle più piccole particelle di materia,

le molecole. Ogni molecola è quindi essa stessa un piccolo magnete con un polo sud e un polo nord (fig. 80) e le proprietà magnetiche di un corpo dipendono essenzialmente dalle disposizioni di questi magnetini nel suo interno: nel caso dei corpi non magnetizzati essi sono orientati in modo del tutto disordinato, mentre nelle sostanze magnetizzate si dispongono in direzioni parallele. I poli magnetici positivi e negativi che nell'interno di un corpo si neutralizzano, mostrano invece il loro effetto agli estremi, dove sembrano esclusivamente localizzate le sorgenti del magnetismo.

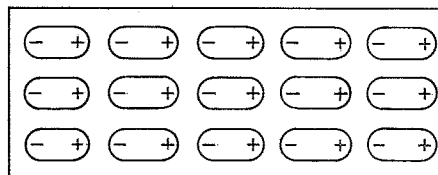


Fig. 80. Un corpo magnetizzato formato da magneti elementari.

Con l'aiuto di aghi magnetici sottili e molto lunghi, ci si può assicurare che in prossimità di un polo l'effetto del polo opposto sia praticamente trascurabile; ciò consente di operare anche nel magnetismo con corpi di prova, e perciò di ripetere tutte le misure già discusse in elettrostatica. È possibile definire quindi le grandezze quantità di magnetismo o *massa magnetica* p e *intensità del campo magnetico* H e verificare che la forza subita da p in un campo H è

$$F = pH.$$

L'unità di massa magnetica è scelta in modo che due unità di massa poste a distanza unitaria si respingano con una forza pure unitaria. La legge di attrazione o repulsione di due poli di masse magnetiche p_1 e p_2 a distanza r , fu trovata sperimentalmente da Coulomb, e ha la forma consueta della legge di attrazione newtoniana

$$F = \frac{p_1 p_2}{r^2}. \quad [46a]$$

Queste quantità hanno naturalmente le stesse dimensioni delle corrispondenti quantità elettrostatiche; e le loro unità nel sistema C.G.S. si scrivono nell'identico modo.

Anche dal punto di vista dello sviluppo matematico della teoria, vi è una notevole analogia fra magnetismo ed elettricità. La differenza essenziale sta nel fatto che il magnetismo è una proprietà molecolare, e che nel caso di magneti di estensione finita, la presenza di masse magnetiche misurabili è solo il risultato dell'orientamento in una medesima direzione di tutte le molecole. In questo fatto risiede appunto l'impossibilità di ottenere separatamente masse magnetiche positive e negative.

2. La pila di Volta e l'elettrolisi

La scoperta, da parte di Galvani (1780) e di Volta (1792), della cosiddetta elettricità di contatto è talmente nota che possiamo, in questa sede, fare a meno di parlarne. Per quanto gli esperimenti compiuti da Galvani sulle zampe delle rane e le discussioni che seguirono sull'origine delle cariche elettriche siano interessanti, il nostro scopo consiste principalmente nel descrivere la formulazione dei concetti e delle leggi dell'elettricità. Ci limiteremo perciò a esporre soltanto i fatti sperimentali.

Se si introducono in una soluzione (fig. 81) due metalli diversi, per esempio rame e zinco in acido solforico diluito, questi manifestano cariche elettriche che hanno esattamente le stesse proprietà delle cariche generate per strofinio. In base alla legge fondamentale dell'elettricità, sui due metalli (poli) si riscontrano cariche uguali e di segno opposto. Il sistema costituito dalla soluzione e dai metalli (che è chiamato *elemento voltaico* o *cella voltaica*), ha quindi la capacità di separare le due specie di elettricità. Ora è notevole il fatto che questa capacità sia apparentemente inesauribile; infatti se si collegano i poli mediante un filo metallico, di modo che le loro cariche, fluendo attraverso il filo, possano neutralizzarsi reciprocamente, non appena il filo viene rimosso, i poli risultano ancora carichi.

L'elemento voltaico continua perciò a far circolare elettricità finché viene mantenuta la connessione col filo metallico; si ha quindi un flusso continuo di elettricità. Il meccanismo attraverso cui tale flusso agisce, è suscettibile di interpretazioni diverse a seconda si accetti una teoria a un fluido o una teoria a due fluidi: nel primo caso è presente soltanto una corrente, nel secondo si hanno due correnti opposte, una per ogni fluido.

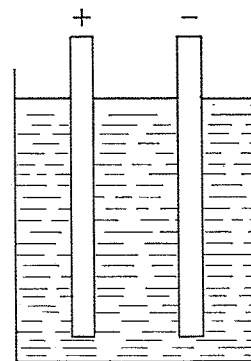


Fig. 81. Cella voltaica.

Ora la *corrente elettrica* si manifesta attraverso effetti ben determinati. Innanzitutto, essa sviluppa calore nel filo metallico di connessione. Questo effetto è ben noto a tutti, in quanto si verifica nei filamenti delle lampadine elettriche. La corrente quindi produce continuamente dell'energia sotto forma di calore. Da dove ricava l'elemento voltaico la capacità di produrre continuamente elettricità e, perciò, indirettamente, calore? Secondo il principio di conservazione dell'energia, tutte le volte che durante un processo compare una certa forma di energia, la stessa quantità di energia deve scomparire sotto un'altra forma.

La sorgente di energia risiede nei processi chimici che avvengono nella cella: un metallo scompare man mano che la corrente fluisce; nello stesso tempo si verifica la separazione di un costituente della

soluzione dall'altro. Nella soluzione possono aver luogo complicati processi chimici; noi non li prenderemo in considerazione, ma ci limiteremo a constatare che l'elemento voltaico è un mezzo per generare elettricità in quantità illimitate, e correnti elettriche di elevata intensità.

Considereremo ora il processo inverso, in cui la corrente elettrica genera una decomposizione chimica. Se noi usiamo ad esempio due metalli chimicamente inattaccabili (*elettrodi*), come il platino, e facciamo attraversare dalla corrente una soluzione acquosa leggermente acidulata, l'acqua si decompone nei suoi elementi, l'idrogeno, che si dirige verso l'elettrodo negativo (*catodo*), e l'ossigeno, che si dirige verso l'elettrodo positivo (*anodo*). Le leggi quantitative relative a questo processo di *elettrolisi*, scoperto da Nicholson e Carlisle (1800), furono trovate da Faraday (1832). Le conseguenze più notevoli a cui portarono le ricerche di Faraday sulla struttura della materia sono ben note; non sono però queste conseguenze che ci inducono a discutere tali ricerche, ma il fatto che le leggi di Faraday fornirono il mezzo per misurare accuratamente le correnti elettriche, e quindi permisero di completare la struttura della teoria elettromagnetica.

Questo esperimento sulla dissociazione elettrolitica può essere eseguito non soltanto servendosi di una corrente voltaica, ma anche con una corrente di scarica, che si ha quando due sostanze metalliche di carica opposta sono connesse con un filo conduttore. Bisogna fare attenzione affinché le quantità di elettricità che si scaricano siano sufficientemente grandi. Esistono dei dispositivi che servono per immagazzinare elettricità, i cosiddetti *condensatori*, che si basano sul principio d'induzione e che danno correnti di scarica tali da consentire la decomposizione di quantità di materia misurabili nella cella elettrolitica. La carica che fluisce attraverso la cella può essere misurata servendosi dei metodi elettrostatici precedentemente discussi. Faraday scoprì la legge in base alla quale una carica doppia, tripla ecc., produce una dissociazione doppia, tripla e così via, cioè che la quantità m di sostanza dissociata (o di uno dei prodotti di dissociazione) è proporzionale alla quantità di elettricità e che ha

attraversato la cella:

$$Cm = e.$$

La costante C dipende dalla natura delle sostanze e dal particolare processo chimico che si considera; tale dipendenza è governata da una legge anch'essa dovuta a Faraday. Come è noto, gli elementi chimici si combinano in proporzioni ben definite per formare i composti; la quantità di un certo elemento che si combina con 1 g dell'elemento più leggero, l'idrogeno, prende il nome di *peso equivalente* di quell'elemento. Per esempio nell'acqua (H_2O), 8 g di ossigeno (O) si combinano con 1 g di idrogeno (H), quindi l'ossigeno ha un peso equivalente di 8 g. La legge di Faraday afferma che la stessa quantità di elettricità necessaria per separare 1 g di idrogeno, è anche in grado di separare un peso equivalente di ogni altro elemento, per esempio, 8 g di ossigeno.

È sufficiente quindi conoscere la costante C relativa all'idrogeno, e, nel caso di ogni altra sostanza, dividere tale valore per il peso equivalente della sostanza stessa. Per l'idrogeno, il cui peso equivalente è $\mu_0 = 1$ g, si ha:

$$C_0 \cdot \mu_0 = e$$

e per un'altra sostanza di peso equivalente μ :

$$C \cdot \mu = e.$$

Dividendo membro a membro queste equazioni si ottiene:

$$\frac{C\mu}{C_0\mu_0} = 1, \quad \text{cioè} \quad C = C_0 \frac{\mu_0}{\mu}.$$

Perciò $C_0\mu_0 = C_0 \times 1$ g è esattamente la quantità di elettricità che separa 1 g d'idrogeno; il valore numerico di C_0 è stato determinato sperimentalmente e, nel sistema C.G.S., è dato da:

$$C_0 = 2,90 \times 10^{14} \text{ unità di carica per grammo.} \quad [47]$$

Possiamo ora riunire le due leggi di Faraday in un'unica formula:

$$e = C_0 \frac{\mu_0}{\mu} m. \quad [48]$$

La dissociazione elettrolitica fornisce quindi un mezzo molto conveniente per misurare la quantità di elettricità e che ha attraversato la cella durante una scarica. Dobbiamo soltanto determinare la massa m di un prodotto di decomposizione di peso equivalente μ ; dall'equazione [48] otteniamo allora la quantità di elettricità cercata. È poi indifferente che questa quantità derivi dalla scarica di conduttori carichi (condensatori) o da una cella voltaica. In quest'ultimo caso si ha un flusso continuo di elettricità di intensità costante; ciò significa che attraverso ogni sezione trasversale del circuito conduttore (e quindi anche attraverso la cella) passa nel tempo t la carica $e = J \times t$. La quantità

$$J = e/t = C_0 \frac{\mu_0}{\mu} \frac{m}{t} \quad [49]$$

è chiamata *intensità di corrente*, e misura la carica elettrica che fluisce attraverso la sezione trasversale del circuito conduttore nell'unità di tempo.

Le sue dimensioni sono:

$$[J] = \left[\frac{e}{t} \right] = \left[\frac{l}{t} \sqrt{F} \right] = \left[\frac{l}{t^2} \sqrt{ml} \right],$$

e la sua unità di misura:

$$\frac{\text{cm} \sqrt{\text{g cm}}}{\text{s}^2}.$$

3. La resistenza e l'effetto termico della corrente

Vogliamo considerare ora il processo di conduzione, cioè la corrente elettrica. Si è soliti paragonare la corrente elettrica con lo scorrere dell'acqua in una conduttura, e applicare al fenomeno in

questione i concetti che sono validi in quel caso. L'acqua, per poter circolare in un tubo, deve essere spinta da una forza. Nel caso in cui l'acqua fluisca, attraverso un tubo inclinato, da un recipiente situato a una certa altezza verso un altro posto più in basso, tale forza coincide con quella di gravità (fig. 82). Questa è tanto maggiore, quanto più grande è il dislivello tra la superficie libera dell'acqua contenuta nel recipiente più in alto e la superficie corrispondente dell'acqua che si trova nel recipiente situato più in basso.

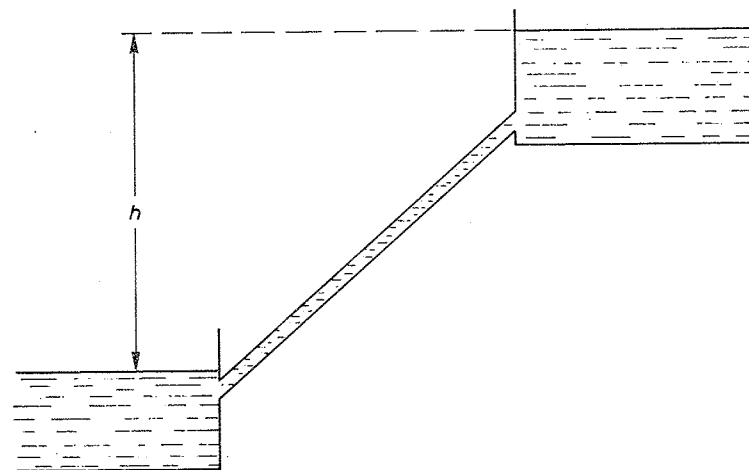


Fig. 82. L'intensità della corrente d'acqua è proporzionale alla differenza di potenziale V e quindi al dislivello h .

Tuttavia la velocità della corrente d'acqua, cioè la sua "intensità" di corrente, non dipende soltanto dalla forza dovuta alla gravitazione, ma anche dalla resistenza che l'acqua incontra nel tubo conduttore. Se questo è lungo e stretto, la quantità d'acqua che lo attraversa nell'unità di tempo è minore di quella che si avrebbe nel caso di un tubo largo e corto. Ne deriva che l'intensità di corrente J è proporzionale alla differenza di energia potenziale V (proporzionale,

a sua volta, alla differenza di altezza dei due livelli; vedi p. 68) e inversamente proporzionale alla resistenza W . Poniamo

$$J = V/W \quad \text{oppure} \quad JW = V, \quad [50]$$

dove per unità di resistenza si è scelta quella che fa circolare l'unità di corrente quando la differenza di livello è unitaria.

G. S. Ohm (1826) applicò esattamente gli stessi concetti alla corrente elettrica. La differenza di livello a cui è dovuto il flusso corrisponde alla forza elettrica. Assumeremo come positivo il segno della corrente che va dal polo positivo a quello negativo. Per un tratto di filo metallico di lunghezza l , dobbiamo porre $V = El$, dove E è l'intensità del campo, considerato costante lungo il filo. Infatti, se su di un tratto di filo di lunghezza maggiore agisce lo stesso campo elettrico, questo fornisce alle cariche elettriche in moto un impulso più elevato. La quantità V è chiamata anche *forza elettromotrice* (*differenza di potenziale* o di livello), e si identifica inoltre col concetto di potenziale elettrico di cui abbiamo parlato precedentemente (p. 190).

Poiché l'intensità di corrente J e l'intensità del campo elettrico E , e quindi anche la differenza di potenziale o forza elettromotrice $V = El$, sono quantità misurabili, la relazione di proporzionalità tra J e V , espressa dalla legge di Ohm, può essere verificata sperimentalmente.

La resistenza W dipende dal materiale e dalla forma del filo conduttore; quanto più esso è lungo e stretto, tanto più grande è W . Se l è la lunghezza del filo ed f l'area della sezione trasversale, W sarà allora direttamente proporzionale a l e inversamente proporzionale ad f . Poniamo

$$\sigma W = l/f \quad \text{oppure} \quad W = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{f} \quad [51]$$

dove il fattore di proporzionalità σ , che dipende soltanto dal materiale di cui è costituito il filo, è chiamato *conduttività*.

Sostituendo ora W (dalla [51]) e $V = El$ nella [50], si ottiene:

$$JW = J \frac{l}{f\sigma} = V = El,$$

dalla quale, eliminando l :

$$\frac{J}{f\sigma} = E \quad \text{oppure} \quad \frac{J}{f} = \sigma E,$$

dove J/f , che rappresenta l'intensità di corrente per unità di sezione, è detta *densità di corrente* e si indica con j . Abbiamo così

$$j = \sigma E. \quad [52]$$

La legge di Ohm così espressa contiene una sola costante, la conduttività, il cui valore dipende dal materiale di cui è fatto il corpo conduttore (filo metallico), ma è del tutto indipendente dalla sua forma e dalle sue dimensioni.

Nel caso di sostanze isolanti si ha $\sigma = 0$. Ma non esistono coibenti ideali: se escludiamo il vuoto assoluto, in tutti gli altri casi la conduttività assume sempre valori diversi da zero, anche se piccolissimi. Esiste una serie ininterrotta di sostanze che va dai cattivi conduttori (come la porcellana o l'ambra) ai metalli, nei quali la conduttività assume valori elevatissimi.

Abbiamo già messo in evidenza che la corrente riscalda il filo conduttore. La legge quantitativa relativa a questo fenomeno fu trovata da Joule (1841). Essa ovviamente è un caso particolare della legge di conservazione dell'energia, in cui si ha la trasformazione di energia elettrica in calore. La legge di Joule afferma che la quantità di calore sviluppata nell'unità di tempo dalla corrente J che attraversa la differenza di potenziale V , è data da

$$Q = JV \quad [53]$$

dove Q non va misurata in calorie ma in unità di lavoro meccanico. Questa formula non verrà più usata in seguito, e qui è stata introdotta semplicemente per completezza.

4. Elettromagnetismo

Fino all'inizio del secolo diciannovesimo, l'elettricità e il magnetismo furono considerati fenomeni appartenenti a campi simili sotto qualche aspetto, ma completamente separati e indipendenti. Si cercò vivamente, ma per molto tempo senza successo, un ponte fra questi due campi. Finalmente Oersted (1820) scoprì che la corrente voltaica deviava un ago magnetico. Nello stesso anno Biot e Savart trovarono la legge quantitativa relativa a questo fenomeno, che Laplace formulò in termini di azione a distanza. Questa legge è molto importante per noi, perché in essa compare una costante, propria dell'elettromagnetismo e con le dimensioni di una velocità, che più tardi si dimostrò coincidente con la velocità della luce.

Biot e Savart stabilirono che la corrente che circola in un filo metallico rettilineo non attrae né respinge un ago magnetico, ma lo induce a ruotare circolarmente intorno al filo (fig. 83), in modo tale che il polo positivo si muove nel senso di una vite destrorsa girata da sotto (senso contrario alle lancette di un orologio) intorno alla direzione (positiva) della corrente. La legge quantitativa può essere messa in una forma più semplice supponendo di dividere il filo conduttore in un certo numero di piccoli tratti di lunghezza l e descrivendo prima l'effetto dovuto a questi elementi di corrente; successivamente per sommatoria, si ottiene l'effetto della corrente totale.

La legge relativa a un elemento di corrente, verrà da noi stabilita soltanto nel caso particolare in cui l'ago magnetico si trovi nel piano che attraversa la parte mediana dell'elemento e sia perpendicolare alla sua direzione (fig. 84). Allora la forza che agisce sul polo magnetico unitario, cioè l'intensità del campo magnetico H in questo piano, è perpendicolare alla congiungente del polo con il punto medio dell'elemento di corrente ed è direttamente proporzionale all'intensità di corrente J e alla sua lunghezza l ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza r :

$$cH = Jlr^2. \quad [54]$$

Questa formula presenta un'apparente analogia con la legge di attrazione di Newton o con la legge dell'elettrostatica e della magnetostatica di Coulomb; in realtà la forza elettromagnetica possiede un carattere completamente diverso, in quanto non agisce nella direzione della congiungente, ma è perpendicolare ad essa. Le tre direzioni di J , r e H sono a due a due perpendicolari fra loro. Da ciò

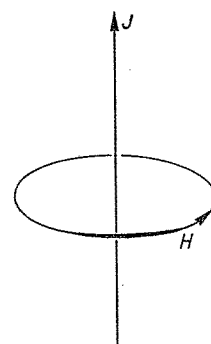


Fig. 83. Il campo magnetico H che circonda una corrente J .

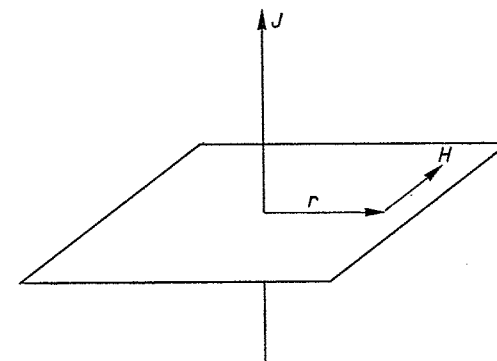


Fig. 84. La direzione di H è perpendicolare alla direzione di J e al raggio vettore r .

si vede che gli effetti elettrodinamici sono intimamente connessi alla struttura dello spazio euclideo, e in un certo senso ci forniscono un sistema di coordinate rettilinee naturale.

Poiché la distanza r , l'intensità di corrente J e il campo magnetico H sono quantità misurabili, il fattore di proporzionalità c introdotto nella formula [54] è completamente determinato. Esso rappresenta ovviamente l'intensità di quella corrente che circolando in un tratto di conduttore di lunghezza unitaria, genera un campo magnetico unitario a distanza unitaria. Invece dell'unità di corrente che abbiamo introdotto (cioè la quantità di elettricità statica che attraversa nell'unità di tempo la sezione trasversale ed è chiamata unità elettrostatica), è abituale, e spesso opportuno, scegliere, come

unità di corrente, la corrente di intensità c (misurata in unità elettrostatiche), che prende allora il nome di unità di corrente elettromagnetica. Il suo uso presenta il vantaggio che l'equazione [54] assume la semplice forma $H = JI/r^2$ o $J = Hr^2/I$; quindi la misura dell'intensità di corrente viene così ricondotta a quella di due lunghezze e di un campo magnetico. Molti strumenti pratici che sono impiegati nella misura di correnti si basano sulla deflessione di magneti causata dalla corrente o viceversa, e quindi danno l'intensità di corrente in unità elettromagnetiche. Per esprimere tale corrente in unità elettrostatiche, è necessario conoscere la costante c , che si può tuttavia determinare con una sola misurazione.

Prima di parlare della determinazione sperimentale della grandezza c , daremo uno sguardo alla sua natura, facendo una semplice considerazione di carattere dimensionale. In base alla [54] si ha: $c = (JI)/(Hr^2)$ e inoltre sussistono le seguenti equazioni dimensionali:

$$[J] = \left[\frac{e}{t} \right], \quad [H] = \left[\frac{p}{l^2} \right],$$

quindi le dimensioni di c diventano:

$$[c] = \left[\frac{el}{pt} \right].$$

Sappiamo tuttavia che la carica elettrica e e il polo magnetico p hanno le stesse dimensioni, in quanto la legge di Coulomb è esattamente la stessa sia per le forze elettriche sia per quelle magnetiche; possiamo quindi scrivere:

$$[c] = \left[\frac{l}{t} \right],$$

da cui si trae che c ha le dimensioni di una velocità.

Furono Weber e Kohlrausch (1856) a eseguire la prima misura accurata di c , mediante esperienze molto precise che furono memorabili non solo per la loro difficoltà, ma anche per le notevoli con-

seguenze che esse implicarono. Per c si ottenne infatti il valore di 3×10^{10} cm/s, cioè proprio la velocità della luce.

Questa coincidenza non poteva essere casuale. Molti studiosi, fra cui lo stesso Weber e numerosi altri fisici e matematici, intuirono il profondo legame che la quantità $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s stabiliva fra due grandi branche della scienza, e cercarono di scoprire il ponte d'unione fra l'elettromagnetismo e l'ottica. Questo compito fu realizzato da Maxwell, dopo che il brillante e ingegnoso metodo di sperimentazione di Faraday aveva portato a conoscenza nuovi fatti e nuove idee di cui fra poco seguiremo lo sviluppo.

5. Le linee di forza di Faraday

Faraday non proveniva da nessuna scuola scientifica, e quindi non era influenzato da idee e da teorie tradizionali. Egli, come è noto, da apprendista rilegatore di libri divenne uno dei più famosi fisici dell'Istituto Reale di Londra. Le sue idee, nate esclusivamente come conseguenze dirette dei suoi numerosi esperimenti, furono altrettanto libere da schemi tradizionali quanto lo fu la sua vita. Abbiamo già discusso le sue ricerche sulla dissociazione elettrolitica; il suo metodo, che consisteva nel far variare in tutti i modi possibili le condizioni sperimentali, lo portò (1837) a sostituire le sostanze conduttrici (acidi o soluzioni saline) poste tra i due conduttori metallici (elettrodi) della cella elettrolitica, con sostanze non conduttrici, come il petrolio e la trementina. Tali sostanze, anche se non subivano alcuna dissociazione, influenzavano in qualche modo i processi elettrolitici. Si trovò infatti che se si caricavano i due piatti metallici mediante una pila di Volta di determinata differenza di potenziale, questi attiravano cariche diverse a seconda della natura della sostanza interposta (fig. 85). Il sistema di conduttori costituito dai due piatti prende il nome di *condensatore*; la sua capacità di accumulare elettricità, cioè la *capacità* del condensatore, dipende dalla sostanza coibente interposta fra i piatti.

Faraday fu talmente impressionato da tale scoperta che abban-

donò da quel momento l'idea tradizionale su cui era fondata l'elettrostatica (cioè l'azione diretta a distanza delle cariche elettriche), e formulò una nuova interpretazione dei fenomeni elettrici e magnetici basata su una teoria di azione per contatto. Dall'esperimento sopra descritto egli dedusse che le cariche sui due piatti metallici non si limitano semplicemente ad agire l'una sull'altra attraverso il mezzo interposto, ma che tale mezzo svolge un ruolo essenziale nel processo di azione reciproca; in base a ciò concluse che l'azione del mezzo interposto si propaga da punto a punto ed è perciò un'azione per contatto, o diretta.

È ben noto che nei processi di deformazione dei corpi solidi le forze elastiche si propagano mediante un'azione per contatto. Faraday, che si attenne sempre ai risultati sperimentali, paragonò sì l'azione contigua delle forze elettriche nei mezzi coibenti a tensioni elastiche, ma non cercò di applicare le leggi dell'elasticità ai fenomeni elettrici. Egli introdusse la rappresentazione grafica di "linee di forza", che attraversano il mezzo coibente nella direzione del campo elettrico e vanno dalle cariche positive a quelle negative. Nel caso di un condensatore piano, le linee di forza sono delle rette perpendicolari ai piani dei piatti (fig. 86). Secondo Faraday, le linee di forza costi-

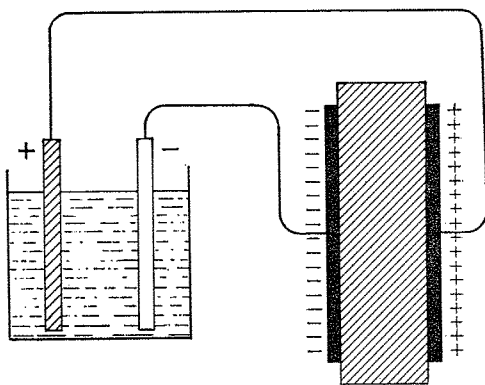


Fig. 85. Condensatore caricato mediante una cella voltaica.

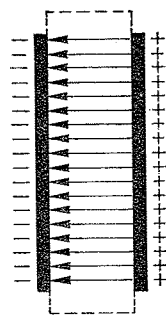


Fig. 86. Linee di forza in un condensatore.

tuiscono il vero sostrato dei fenomeni elettrici; egli infatti le considerò come configurazioni materiali suscettibili di muoversi, di deformarsi, e di dar luogo quindi agli effetti elettrici. Le cariche, per Faraday, svolgono un ruolo affatto secondario, in quanto posizioni di partenza e di arrivo delle linee di forza. Le sue idee trovarono conferma da quegli esperimenti che provarono che nei conduttori la carica elettrica totale si dispone sulla loro superficie, mentre l'interno di questa rimane del tutto privo di cariche. Egli cercò di fornire una prova decisiva di questo fatto, costruendo una grande gabbia metallica, nella quale si introdusse munito di sensibili strumenti atti a compiere misure elettriche. Assegnando poi alla gabbia una carica molto intensa, aveva trovato che nell'interno di essa non si riscontrava alcuna traccia di cariche. Abbiamo usato precedentemente (p. 188) questa proprietà nel derivare la legge dell'azione a distanza di Coulomb. Faraday, in base alle sue esperienze, pervenne alla conclusione che la carica non era l'elemento fondamentale dei fenomeni elettrici, e che essa non doveva essere immaginata come un fluido in grado di esercitare forze a distanza. L'elemento fondamentale è invece la tensione del campo elettrico negli isolanti, rappresentata dalle linee di forza. In un certo senso, i corpi conduttori rappresentano delle cavità dello spazio occupato da un campo elettrico, e le cariche che immaginiamo nel suo interno sono soltanto fittizie e si introducono esclusivamente per spiegare le tensioni che hanno origine nel campo, come azioni a distanza. Fra i corpi non conduttori, o dielettrici, vi è anche il *vuoto*, l'*etere*, che incontriamo qui in una forma nuova.

Questo particolare punto di vista di Faraday non incontrò all'inizio alcun favore tra i fisici e i matematici del tempo. Il concetto di azione a distanza fu conservato anche quando si tenne conto dell'azione "dielettrica" delle sostanze non conduttrici, scoperta da Faraday, modificando la legge di Coulomb: ad ogni corpo isolante si assegnò una costante ϵ , la *costante dielettrica*, definita dal fatto che la forza agente fra due cariche e_1 , e_2 situate nel mezzo isolante è più piccola

nel rapporto $1:\epsilon$ di quella che agisce *nel vuoto*:

$$F = \frac{1}{\epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad [55]$$

Tale costante, sempre maggiore di uno tranne che nel vuoto (dove vale uno, esattamente) consente di interpretare ogni fenomeno elettrostatico anche nel caso in cui si tengano presenti le proprietà dielettriche delle sostanze isolanti. Come abbiamo già ricordato, i primi tentativi di trovare una spiegazione ai fenomeni dell'elettrostatica si basarono su una teoria di azione pseudo-diretta, la cosiddetta teoria del potenziale; aggiungiamo ora che anche nell'ambito di questa formulazione, non era difficile introdurre il concetto di costante dielettrica ϵ . Oggi noi sappiamo che ciò era già equivalente a una trattazione matematica del concetto di linee di forza di Faraday; ma in quel tempo la teoria del potenziale era considerata un puro artificio matematico e non si era ancora arrivati a eliminare l'antitesi fra la teoria classica di un'azione a distanza e l'idea di Faraday di un'azione diretta.

Un punto di vista analogo fu sviluppato da Faraday anche riguardo al magnetismo: dall'osservazione che le forze esistenti fra due masse magnetiche dipendono dal mezzo interposto, egli giunse alla conclusione che le forze magnetiche, come quelle elettriche, sono il risultato di un particolare stato di tensione del mezzo, rappresentato anche in questo caso dalle linee di forza. Queste possono essere facilmente osservate cospargendo della limatura di ferro su un foglio di carta appoggiato al magnete (fig. 87).

La teoria dell'azione a distanza porta così a introdurre formalmente una nuova costante caratteristica della sostanza, la *permeabilità magnetica* μ , e a modificare la legge di Coulomb nel modo seguente

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 p_2}{r^2}. \quad [55a]$$

Tuttavia, questo procedimento esclusivamente formale non è ap-

parso del tutto soddisfacente ai fisici, che hanno pensato all'esistenza di un meccanismo molecolare in grado di interpretare la polarizzazione magnetica e dielettrica. Abbiamo già visto che le proprietà magnetiche di certe sostanze possono essere interpretate microscopicamente considerando le loro molecole come piccoli magneti elementari orientati secondo direzioni parallele per effetto del processo

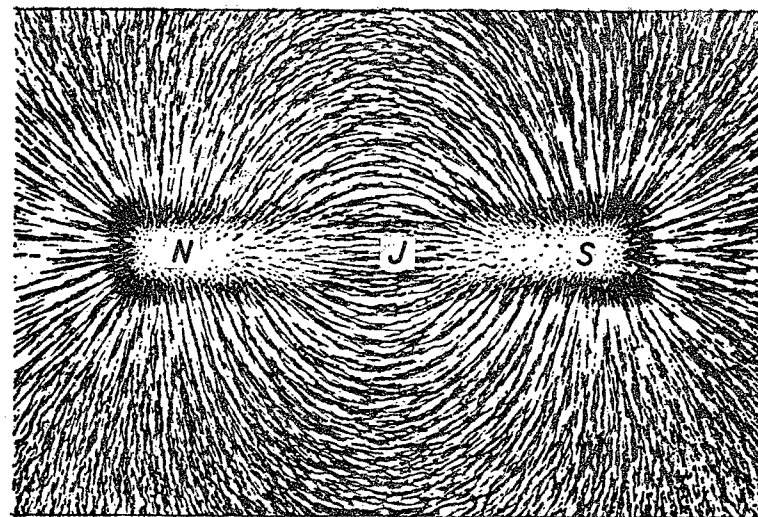


Fig. 87. Il campo magnetico di una sbarretta magnetizzata è reso visibile dalla limatura cosparsa su un foglio di carta, sovrapposto alla sbarretta.

di magnetizzazione. Tale parallelismo dovrebbe avere carattere permanente per queste sostanze e mancherebbe del tutto invece per la maggior parte dei corpi che non presentano proprietà magnetiche permanenti. L'orientamento potrebbe essere determinato solo da un campo magnetico esterno e dovrebbe scomparire col campo; si tratterebbe cioè di sostanze dotate di proprietà magnetiche solo in presenza di un campo. Anzi, in tal caso, l'ipotesi dei magneti elementari non sarebbe necessaria, dal momento che, se ogni molecola contiene

le due masse magnetiche positive e negative, esse si separerebbero sotto l'azione di un campo e la molecola dovrebbe diventare di conseguenza un magnete. Questo fenomeno di induzione magnetica dovrebbe avere proprio lo stesso effetto rappresentato formalmente introducendo il concetto di permeabilità. Le molecole di un simile mezzo, posto fra le espansioni polari di una calamita, si dispongono a formare catene di piccoli magneti (dipoli magnetici) le cui opposte polarità si compensano reciprocamente nell'interno; restano solo i poli estremi dei magnetini finali, che indeboliscono il campo generato dalle espansioni della calamita (fig. 88). (Si presenta anche l'effetto opposto di rafforzamento, ma non ci occuperemo della sua spiegazione.)

Vi è una stretta analogia fra questa descrizione delle proprietà magnetiche e quanto abbiamo visto in elettrostatica; da questo punto di vista, un dielettrico si può ritenere formato di molecole già dotate di un dipolo elettrico, e quindi suscettibili di orientarsi in presenza di un campo esterno, oppure tali da diventare dipoli in seguito alla separazione delle cariche positive e negative sotto l'azione del campo. Anche in questo caso, fra le armature di un condensatore (fig. 89) si formano delle catene di dipoli, le cui opposte polarità si compensano all'interno del mezzo, ma non in prossimità delle armature; ciò dà luogo ad una parziale neutralizzazione della carica del condensatore, e quindi alla necessità di aumentare la carica delle armature, per mantenere un'identica differenza di potenziale. È per questa ragione che in presenza di un dielettrico la capacità di un condensatore aumenta.

Nella teoria dell'azione a distanza l'effetto del dielettrico è indiretto. Il concetto di campo, che nel caso del vuoto è una pura astrazione e indica soltanto la distribuzione geometrica della forza che si esercita su una carica unitaria, acquista in presenza di un dielettrico un significato concreto; esso rappresenta un'effettiva modificazione delle proprietà elettriche della sostanza, in conseguenza dello spostamento molecolare delle cariche di segno opposto.

Al contrario, nella teoria di Faraday dell'azione per contatto,

tale differenza tra il campo nell'etere e in un mezzo isolante non ha ragione di esistere, perché ambedue sono considerati dei dielettrici, con la differenza che la costante dielettrica ϵ vale uno per l'etere, ed è maggiore di uno negli altri casi. Se la rappresentazione grafica dello spostamento elettrico è corretta per la materia, essa deve essere

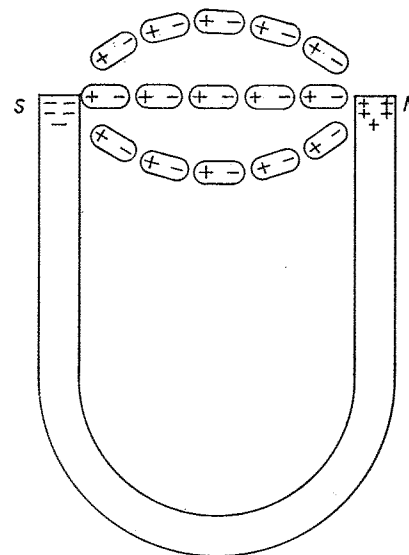


Fig. 88. Orientamento dei dipoli magnetici molecolari fra le espansioni di una calamita.

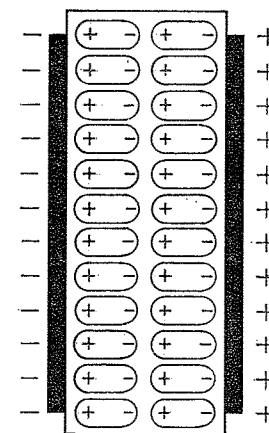


Fig. 89. I dipoli elettrici fra le armature di un condensatore si orientano lungo le linee di forza.

corretta anche per l'etere. Quest'idea svolge un ruolo fondamentale nella teoria di Maxwell, che consiste essenzialmente nel tradurre il concetto intuitivo di linea di forza nel linguaggio rigoroso della matematica. Maxwell suppone che anche nel caso dell'etere, l'esistenza di un campo elettrico o magnetico si accompagni a uno "spostamento" delle cariche; tale ipotesi non richiede necessariamente che l'etere possieda una struttura atomica, anche se può essere utile ai fini di una maggior chiarezza supporre che le molecole di etere

divengano dei dipoli in presenza di un campo, allo stesso modo delle molecole di un mezzo. Naturalmente però il campo non è la causa della polarizzazione, ma è lo spostamento che causa lo stato di tensione che noi chiamiamo campo elettrico. Le catene di molecole dell'etere sono le linee di forza, e le cariche sulla superficie dei conduttori non sono altro che le cariche terminali di queste catene. Se oltre alle particelle di etere sono presenti anche molecole materiali, la polarizzazione aumenta e le cariche terminali divengono più grandi.

Discuteremo ora queste idee più in particolare. A tal fine ci serviremo del concetto di distribuzione continua di carica, poiché se, come abbiamo visto, i fenomeni di induzione elettrica e magnetica possono essere illustrati come il risultato di una catena di dipoli molecolari (figg. 88, 89), l'idea di una molecola di etere non ha alcun significato concreto. Supponiamo che due densità di carica ρ uguali e opposte siano distribuite in modo continuo in una regione di spazio con forma di parallelepipedo; è chiaro allora che se le due densità sono presenti simultaneamente, lo spazio sarà elettricamente neutro (fig. 90a). Viceversa, l'esistenza di un campo elettrico è il risultato, secondo le idee di Faraday e di Maxwell, di uno spostamento delle due distribuzioni di carica per un piccolo tratto a (fig. 90b), che genera su due facce opposte di area f cariche uguali e di segno contrario. Tali cariche sono effettivamente distribuite in un volume $f \cdot a$, ma, a causa del piccolo valore di a , possiamo trattarle come due distribuzioni superficiali di carica $\rho f a$ e $-\rho f a$. Se la superficie è unitaria, la carica generata vale ρa , e rappresenta una misura dell'induzione dielettrica D ; come vedremo fra un istante però, la relazione esistente fra queste due quantità non è una semplice uguaglianza.

Il campo E generato da una carica puntiforme in un dielettrico, (fig. 91) vale per la [55]

$$E = \frac{e}{\epsilon r^2}. \quad [56]$$

Nel linguaggio di Faraday questo fatto si esprime dicendo che l'in-

duzione assume valori identici sulla superficie di una sfera con centro nel punto in cui è situata la carica, e diminuisce all'aumentare di r (fig. 92). Supponiamo che le due armature di un condensatore sferico, di raggi r ed r' (con $r' < r$), posseggano densità di carica ρ e $-\rho$;

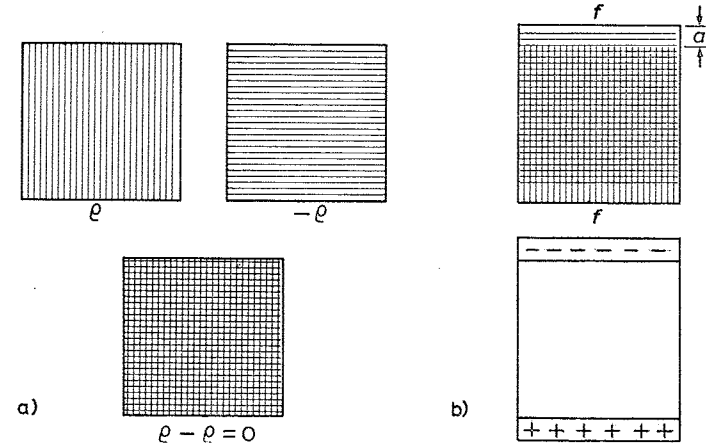


Fig. 90. a) Due densità di carica opposte distribuite in un volume cubico si annullano.

b) Lo spostamento di due distribuzioni di carica opposte per una breve distanza a , genera due sottili strati di carica opposti sulle corrispondenti superfici f del cubo.

uno spostamento in direzione radiale produrrà allora sulle armature due distribuzioni di carica $f a \rho$ e $-f' a' \rho$, ambedue uguali (in valore assoluto) alla carica puntiforme e assegnata. Basta pensare infatti che, facendo tendere a zero il raggio dell'armatura interna, la carica posseduta deve neutralizzare la carica e posta nel centro. Poiché la superficie totale della sfera di raggio r è $f = 4\pi r^2$, si ottiene $e = 4\pi r^2 a \rho$, che sostituita nella [56] dà

$$E = \frac{e}{\epsilon r^2} = \frac{4\pi a \rho}{\epsilon}.$$

Esiste quindi una relazione di proporzionalità fra E e a ; se ora si

definisce $D=4\pi a q$, la relazione precedente conduce alla

$$D = \varepsilon E. \quad [57]$$

L'induzione D è orientata nella direzione dei raggi uscenti dalla carica centrale e .

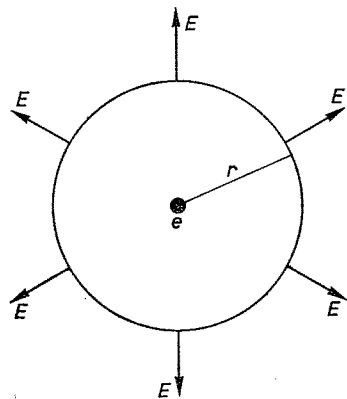


Fig. 91. Una carica puntiforme e genera un campo E diretto radialmente e costante su ogni superficie sferica di centro e .

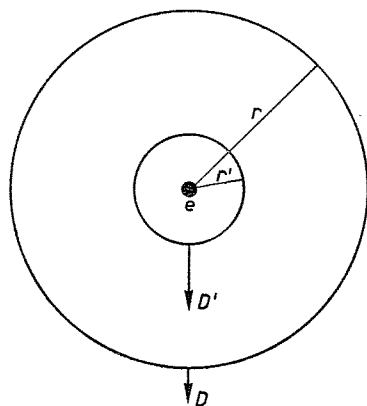


Fig. 92. Lo spostamento su due sfere concentriche nel cui centro è situata la carica e . Vale la relazione di uguaglianza fra le cariche: $4\pi r'^2 q a' = 4\pi r^2 q a = e$, e quindi $r^2 D = r'^2 D' = e$.

Un'espressione analoga vale anche nel caso generale in cui la carica non è concentrata in un punto, ma distribuita in modo continuo con densità di carica q (da non confondere con la densità fittizia indicata con la stessa lettera per illustrare il concetto maxwelliano di spostamento); la formula cercata in simboli è

$$\operatorname{div} D = 4\pi q. \quad [58]$$

Questa formula è più di un aiuto mnemonico. Secondo la convenzione di Maxwell il simbolo "div" rappresenta operazioni di deri-

vazione sulle componenti di D . La [58] è quindi la formulazione matematica sotto forma di equazione differenziale di una legge di azione per contatto.

Resta da decidere a questo punto se accettare le idee di Maxwell e Faraday o la teoria dell'azione a distanza.

In effetti, finché ci limitiamo a considerare fenomeni statici di elettricità o magnetismo, i due punti di vista sono equivalenti, poiché la teoria di Faraday, per quanto tradotta in termini matematici da equazioni differenziali, non introduce il concetto di velocità finita di propagazione per le tensioni; è per questo che abbiamo parlato di una teoria di azione per pseudo-contatto. Tuttavia, furono proprio Faraday e Maxwell a scoprire quei fenomeni che, analogamente agli effetti inerziali della meccanica, ritardano la propagazione di un certo stato elettromagnetico, e quindi conducono all'ipotesi di una velocità di propagazione finita. Tali fenomeni sono appunto la corrente di spostamento e l'induzione magnetica.

6. La corrente elettrica di spostamento

Supponiamo che i poli di una cella galvanica siano collegati ai piatti di un condensatore per mezzo di due fili metallici, in uno dei quali sia inserito un interruttore (fig. 93). Se abbassiamo l'interruttore, passa una corrente che carica i due piatti del condensatore, fra i quali si genera perciò un campo elettrico E . Prima di Maxwell, si parlava in questo caso di "circuito aperto". Maxwell, tuttavia, scoprì che all'aumentare del campo E , tra i piatti del condensatore fluisce una *corrente di spostamento*, e pertanto il circuito diventa chiuso. Non appena i piatti del condensatore si sono caricati completamente, cessa sia la corrente di conduzione sia quella di spostamento.

È fondamentale, a questo punto, l'affermazione di Maxwell che sia la corrente di spostamento sia quella di conduzione generano un campo magnetico, conformemente alla legge di Biot e Savart. Che in realtà ciò si verifichi, non solo è stato comprovato dal successo

riportato dalla teoria di Maxwell nel predire un gran numero di fenomeni, ma è anche stato confermato, in seguito, direttamente dall'esperienza.

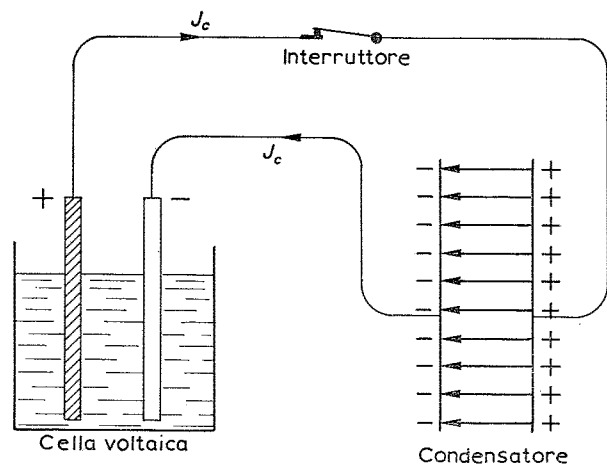


Fig. 93. Quando si carica il condensatore mediante una corrente di convezione J_c , il campo elettrico all'interno del condensatore varia e dà luogo a una corrente di spostamento della stessa grandezza di J_c .

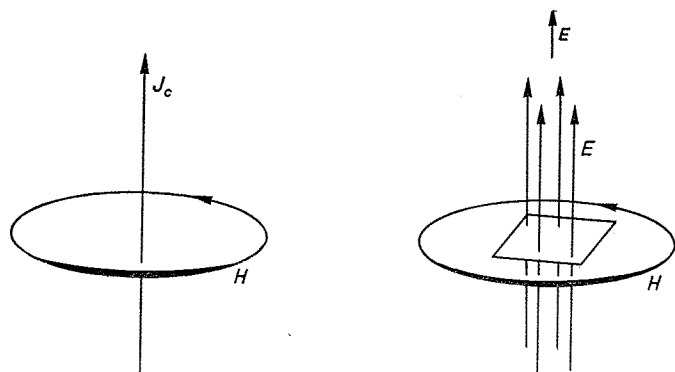


Fig. 94. Sia la corrente di convezione J_c sia quella di spostamento J_a generano un campo magnetico che le circonda.

L'intensità della corrente di spostamento è facile da calcolare. Sappiamo che la quantità $qaf = (D/4\pi)f$ rappresenta lo spostamento di carica attraverso una piccola superficie f perpendicolare al campo. Se D è la variazione subita da D nel piccolo intervallo di tempo τ , la carica che nel tempo τ attraversa f è data allora da $(D/4\pi)(f/\tau)$. Quindi la corrente che passa attraverso f sarà $(D/4\pi)(f/\tau)$, dove $j_a = D/4\pi\tau$ è la densità della *corrente di spostamento*. Ponendo $D = \varepsilon E$, da cui $D = \varepsilon E$, si ottiene $j_a = (\varepsilon/4\pi)(E/\tau)$. Secondo Maxwell, quindi, la densità di corrente totale è data dalla somma $j = j_c + j_a$, dove j_c è la densità di corrente delle cariche libere mobili e j_a la corrente di spostamento. Entrambe le correnti sono circondate, al solito modo, da un campo magnetico (fig. 94).

7. L'induzione magnetica

Dopo che Oersted ebbe scoperto che la corrente di conduzione produce un campo magnetico, e dopo che Biot e Savart ebbero spiegato tale fenomeno come un'azione a distanza, Ampère trovò (1820) che due correnti voltaiche si influenzano a vicenda, e riuscì a esprimere la legge che governa questo fenomeno ancora in termini di azione a distanza. Questa scoperta ebbe notevoli conseguenze, in quanto permise di considerare il magnetismo come un effetto dovuto a elettricità in movimento. Ampère suppose che nelle molecole dei corpi magnetizzati circolassero piccole correnti chiuse e mostrò che tali correnti si comportavano esattamente come dei magneti elementari. Questa idea fu sottoposta a prove rigorose, e da allora i fluidi magnetici divennero superflui. Soltanto l'elettricità dava luogo a perplessità: quando si trovava in quiete, generava il campo elettrostatico, e, quando era in movimento, anche il campo magnetico. Si può anche esprimere la scoperta di Ampère come segue: secondo Oersted un filo metallico percorso dalla corrente J_1 produce un campo magnetico da cui è circondato; allora un altro filo metallico, in cui circola la corrente J_2 , viene attratto dalle forze dovute a questo campo

magnetico. In altre parole, il campo prodotto da una corrente tende a deviare o ad accelerare l'elettricità in moto.

Ci si pose, quindi, la seguente domanda: il campo magnetico, può anche mettere in moto elettricità che si trova in quiete? Può generare, o "indurre", una corrente nel secondo filo metallico, se questo non è inizialmente percorso da corrente?

Faraday diede la risposta a questo problema (1831). Egli scoprì che un campo magnetico statico non è in grado di produrre una corrente elettrica, mentre lo è un campo variabile col tempo. Per esempio, osservò che avvicinando rapidamente un magnete a un anello di materiale conduttore, in questo, non appena il magnete si muoveva, cominciava a fluire una corrente. Quando, in particolare, egli generava un campo magnetico servendosi di una corrente primaria, nel filo secondario, ogni volta che la prima corrente iniziava o cessava si riscontrava un breve impulso di corrente.

Da ciò segue chiaramente che la forza elettrica indotta dipende dalla velocità con cui il campo magnetico varia col tempo. Faraday riuscì a formulare una legge quantitativa per questo fenomeno, servendosi del concetto di linea di forza. Sulla base delle idee di Maxwell, esprimeremo ora questa legge in una forma tale far apparire evidente la sua analogia con la legge di Biot e Savart.

Consideriamo un campo magnetico H , costituito da un fascio di linee di forza magnetiche parallele, intorno al quale sia posto un filo conduttore circolare (fig. 95). Supponiamo poi che l'intensità del campo H vari di una quantità H nel piccolo intervallo di tempo τ ; indicheremo con H/τ la velocità con cui esso varia, cioè la variazione subita dal numero di linee di forza. Se in analogia con lo spostamento elettrico rappresentiamo le linee di forza come catene di dipoli magnetici (in realtà ciò non è vero secondo Ampère), al variare del campo H in ogni molecola d'etere le quantità magnetiche subiranno uno spostamento, si originerà cioè una "corrente magnetica di spostamento" la cui intensità per unità di superficie, o densità di corrente, è data da $i=H/(4\pi\tau)$. Se si considera il campo magnetico H non nell'etere, ma in un mezzo di permeabilità μ , la densità della

corrente magnetica di spostamento è $i=(\mu/4\pi)(H/\tau)$. Perciò attraverso la sezione f (cioè la superficie del cerchio formato dal filo conduttore) passa la corrente magnetica $I=fi=f(\mu/4\pi)(H/\tau)$.

Secondo Faraday, questa corrente magnetica genera intorno a sé un campo elettrico E , da cui è circondata allo stesso modo in cui, nell'esperimento di Oersted, il campo magnetico H circonda la corrente elettrica; soltanto, le linee di forza hanno ora senso opposto. È tale campo E che fa circolare la corrente indotta nel filo conduttore; inoltre, esso è presente anche quando non c'è alcun filo conduttore nel quale la corrente possa formarsi.

Si nota che l'induzione magnetica di Faraday è in perfetta analogia con la scoperta elettromagnetica di Oersted. Anche la legge quantitativa è la stessa. Secondo Biot e Savart il campo magnetico H prodotto da un elemento di corrente di lunghezza l e intensità J (vedi fig. 84), nel piano mediano perpendicolare all'elemento, è perpendicolare alla congiungente r e alla direzione della corrente, e vale $H=(Jl)/(cr^2)$ (formula [54]).

Si verifica esattamente lo stesso fatto quando si scambiano fra loro le grandezze elettriche e magnetiche e si inverte il senso di rotazione (fig. 96). Nel piano centrale l'intensità del campo elettrico

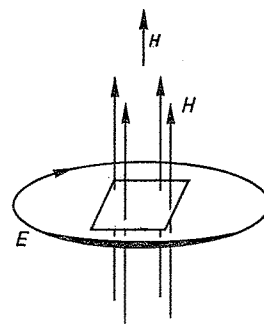


Fig. 95. Un campo magnetico variabile che rappresenta una corrente magnetica I è circondato da un campo elettrico.

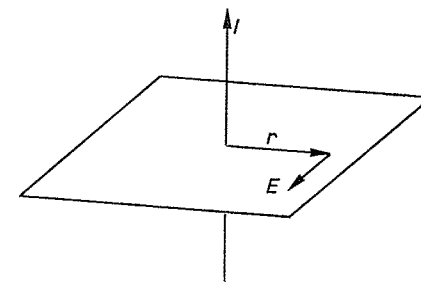


Fig. 96. Direzione del campo elettrico E indotto da una corrente magnetica I (vedi fig. 84).

indotto è data da $E=(I)/(cr)^2$, in cui figura la stessa costante c (rapporto fra l'unità di corrente elettromagnetica e l'unità di corrente elettrostatica) che, secondo Weber e Kohlrausch, deve coincidere con la velocità della luce; che in effetti si verifichi proprio questo, si può facilmente vedere in base a considerazioni energetiche.

Dalla legge d'induzione dipendono numerose applicazioni dell'elettricità e del magnetismo di carattere fisico e tecnico. Il trasformatore, la bobina d'induzione, la dinamo e innumerevoli altri apparecchi e macchine sono strumenti in cui si producono correnti d'induzione per mezzo di campi magnetici variabili. Ma per quanto queste cose possano essere interessanti, esse esulano dalla nostra trattazione. La nostra meta finale è la ricerca di quale connessione esista fra l'etere e il problema dello spazio. Rivolgeremo quindi subito l'attenzione alla teoria di Maxwell, che si propone di trattare in modo unitario e compatto, basandosi sulla sola teoria dell'azione diretta, tutti i fenomeni elettromagnetici noti.

8. La teoria dell'azione per contatto di Maxwell

Abbiamo già constatato che non appena fu stabilita la legge di Coulomb, l'elettrostatica e la magnetostatica furono formulate come teorie di azione per pseudo-contatto. Maxwell comprese allora l'opportunità di fondere queste teorie con le idee di Faraday, e di elaborarle in modo da includere i nuovi fenomeni della polarizzazione dielettrica e magnetica, dell'elettromagnetismo e dell'induzione magnetica.

Come punto di partenza della sua teoria, Maxwell si basò sull'idea, cui abbiamo già accennato, che un campo elettrico E è sempre accompagnato da uno spostamento elettrico $D=\varepsilon E$, non soltanto nella materia, in cui ε è diverso da 1, ma anche nell'etere, dove $\varepsilon=1$. Come abbiamo già spiegato, tale spostamento si può interpretare come un fenomeno dovuto alla separazione di cariche elettriche e alla presenza di flussi di elettricità nelle molecole. Abbiamo anche trovato una legge differenziale, che, in ogni punto dello spazio, mette

in relazione la densità di carica ρ con la divergenza di $D=\varepsilon E$:

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi \rho . \quad [58]$$

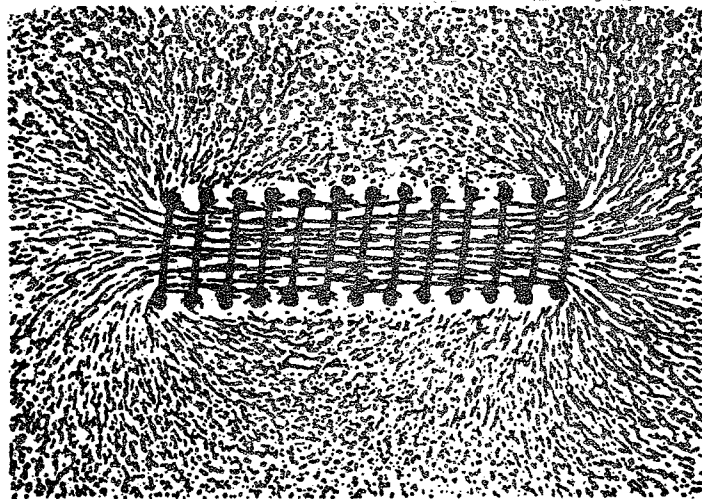
Le stesse considerazioni si applicano al magnetismo, ma con un'importante differenza: che, cioè, secondo Ampère, non esistono in realtà né magneti, né grandezze magnetiche, ma soltanto elettromagneti. Il campo magnetico deve sempre essere prodotto da correnti elettriche, siano esse correnti di conduzione in fili metallici, o correnti molecolari nelle molecole. Segue da ciò che le linee di forza magnetiche non hanno mai fine, nel senso che o sono chiuse, o si estendono all'infinito. È proprio ciò che avviene nel caso di un elettromagnete, che è un solenoide percorso da corrente (fig. 97a, b); nell'interno del solenoide le linee di forza magnetiche sono linee rette, ma all'esterno sono in parte chiuse, e in parte si dirigono all'infinito. Se consideriamo la parte di bobina compresa fra due piani A e B , lo "spostamento magnetico" μH che entra attraverso A sarà uguale a quello che esce da B . Dobbiamo perciò scrivere

$$\operatorname{div} \mu H = 0 . \quad [59]$$

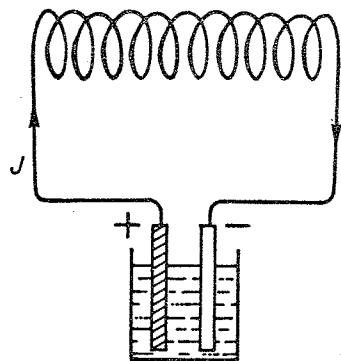
Questa è la formula dell'azione diretta di Maxwell, nel caso del magnetismo. È da notare che in luogo di spostamento si usa l'espressione *induzione magnetica*.

Consideriamo ora la legge dell'elettromagnetismo di Biot e Savart; allo scopo di trasformarla in una legge di azione diretta, supponiamo che la corrente elettrica, anziché circolare in un filo metallico sottile, sia distribuita uniformemente, con densità $j=J/f$, su una sezione trasversale circolare f . Ci chiediamo allora quanto vale l'intensità del campo magnetico H sul bordo della sezione trasversale. Per la legge di Biot e Savart tale campo ha sempre la direzione della tangente al cerchio, e in base alla formula [54] ha il valore $H=(Jl)/(cr)^2$, dove r è il raggio del cerchio e l la lunghezza dell'elemento di corrente. Ora l'area della sezione trasversale, che è un cerchio, è data da $f=\pi r^2$. Possiamo quindi scrivere la [54] in questo modo: $(cH)/(c\pi l)=J/(\pi r)^2=$

$=J/f=j$. Questo vale per ogni sezione trasversale e per ogni lunghezza, comunque piccola. A primo membro, allora, abbiamo una certa espressione differenziale del campo magnetico, e la legge afferma che questa quantità è proporzionale alla densità di corrente. Non



a)



b)

Fig. 97. Il campo magnetico di un solenoide.

- a) Linee di forza del solenoide rese visibili per mezzo di limatura di ferro.
b) Corrente J che circola nel solenoide.

possiamo qui analizzare matematicamente la natura di tale grandezza differenziale. Si deve tener conto non soltanto dell'intensità, ma anche della direzione del campo magnetico, e poiché questo si chiude a cerchio o "si arrotola" intorno alla direzione della corrente, l'espressione differenziale viene chiamata "rotore" del campo H (si scrive "rot H "). Di conseguenza si ha simbolicamente

$$c \operatorname{rot} H = 4\pi j. \quad [60]$$

Anche questa formula verrà da noi considerata soltanto come un espediente mnemonico al fine di ricordare le relazioni esistenti fra l'intensità e la direzione del campo magnetico H , e la densità di corrente j . Tuttavia per il matematico essa è un'equazione differenziale dello stesso tipo di quella che esprime la legge [58].

Nel caso dell'induzione magnetica vale esattamente la stessa legge, che scriveremo ora con il segno opposto per indicare che il senso di rotazione è qui inverso:

$$c \operatorname{rot} E = -4\pi i. \quad [61]$$

Le quattro formule simboliche dalla [58] alla [61], presentano una straordinaria simmetria. Un siffatto accordo formale non deve assolutamente lasciarci indifferenti. Esso mostra la semplicità che sta alla base dei fenomeni naturali, che non riusciamo a percepire direttamente a causa delle limitazioni dei nostri sensi e che si rivela soltanto alle nostre capacità di analisi.

La corrente di conduzione e quella di spostamento saranno in generale presenti simultaneamente. Per la prima sussiste la legge di Ohm, $j_c = \sigma E$ ([52], p. 199), e per la seconda la legge di Maxwell: $j_a = (\epsilon/4\pi)(E/\tau)$. Se entrambe sono presenti allo stesso tempo, possiamo scrivere:

$$j = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{E}{\tau} + \sigma E.$$

Nel caso del magnetismo non si ha corrente di conduzione, quindi abbiamo sempre $i = (\mu/4\pi)(H/\tau)$. Sostituendo ciò nelle nostre equa-

zioni simboliche, dalla [58] alla [61], otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi \rho, \\
 (b) \quad & \operatorname{div} \mu H = 0, \\
 (c) \quad & c \operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{E}{\tau} + 4\pi \sigma E, \\
 (d) \quad & c \operatorname{rot} E = -\mu \frac{H}{\tau}.
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Queste sono le leggi di Maxwell, che fino ai nostri giorni hanno costituito la base di tutte le teorie elettromagnetiche ed ottiche. Per il matematico esse sono rigorose equazioni differenziali; per noi sono relazioni mnemoniche che stabiliscono quanto segue:

- a) dovunque si abbia una carica elettrica, si origina un campo elettrico tale che in ogni volume la carica è compensata esattamente dallo spostamento;
- b) lo spostamento magnetico che attraversa verso l'esterno una superficie chiusa, è uguale a quello che attraversa la superficie verso l'interno (non ci sono cariche magnetiche libere);
- c) una corrente elettrica, di conduzione o di spostamento, è circondata da un campo magnetico;
- d) una corrente d'induzione magnetica è circondata da un campo elettrico nel senso opposto.

Le "equazioni di campo" di Maxwell, come esse sono chiamate, costituiscono una vera teoria di azione diretta o di azione per contatto, in quanto danno luogo, come ora vedremo, a una velocità di propagazione finita delle forze elettromagnetiche.

Tuttavia al tempo in cui furono proposte, la fiducia nell'azione diretta a distanza basata sul modello di attrazione di Newton era ancora così profondamente radicata, che trascorse un notevole periodo prima che esse fossero accettate, in quanto la teoria dell'azione a distanza era anche riuscita a descrivere i fenomeni d'induzione servendosi di formule. A questo fine, si partì dall'ipotesi che le cariche in moto, oltre all'attrazione coulombiana, esercitassero certe azioni

a distanza dipendenti dalla grandezza e dalla direzione della velocità. La prima ipotesi del genere fu dovuta a Neumann (1845). Un'altra legge famosa è quella trovata da Wilhelm Weber (1846); formule analoghe furono date da Riemann (1858) e da Clausius (1877). Queste teorie hanno in comune l'idea che tutte le azioni elettriche e magnetiche devono essere spiegate per mezzo di forze agenti tra cariche elettriche elementari, o "elettroni", come diciamo oggi. Esse furono precorritrici dell'attuale teoria degli elettroni, anche se si trascurò una circostanza essenziale: la velocità di propagazione finita delle forze. Queste teorie dell'elettrodinamica, basate sull'azione a distanza, spiegavano completamente le forze elettromotrici e le correnti d'induzione che si avevano nel caso di correnti di conduzione in circuiti chiusi. Ma nel caso di circuiti "aperti", cioè per un processo di carica e scarica di un condensatore, esse erano destinate all'insuccesso, poiché qui intervengono le correnti di spostamento che non sono comprese nelle teorie dell'azione a distanza. È ad Helmholtz che dobbiamo la progettazione di appropriati esperimenti che ci permettono di stabilire una scelta fra la teoria dell'azione a distanza e quella dell'azione per contatto. Egli riuscì a realizzare l'esperienza con un certo successo, e divenne uno dei più appassionati sostenitori della teoria di Maxwell. Fu tuttavia il suo allievo Hertz, con la scoperta delle onde elettromagnetiche, che assicurò la vittoria alla teoria di Maxwell.

9. La teoria elettromagnetica della luce

Abbiamo già ricordato (p. 200) l'impressione che suscitò nei fisici del tempo il fatto, messo in evidenza da Weber e Kohlrausch, che la costante elettromagnetica c fosse uguale alla velocità della luce. Ulteriori indicazioni sull'esistenza di una stretta relazione tra luce e fenomeni elettromagnetici, risultarono dalla scoperta di Faraday (1834), secondo cui un raggio di luce polarizzata che attraversi una sostanza trasparente magnetizzata, ne subisce l'influenza. Quando il raggio è parallelo alle linee di forza magnetiche, il suo piano di polarizza-

zione viene ruotato. Da questo fatto, Faraday arrivò alla conclusione che l'etere è il mezzo attraverso cui si propagavano le linee di forza elettromagnetiche, dovevano essere identici. Egli non possedeva nozioni matematiche tali da consentirgli di dare alle sue idee una formulazione quantitativa. Le sue erano idee di tipo più astratto, e andavano molto al di là del punto di vista banale che accettava per noto tutto ciò che era familiare. L'etere di Faraday non era un mezzo elastico. Nel derivare le sue proprietà, egli non si basò su analogie che si riferivano a un mondo materiale noto solo in apparenza, ma ricorse ad accurati esperimenti e alle deduzioni sistematiche che si potevano trarre da questi. Maxwell e Faraday erano pensatori della stessa capacità, ma il primo possedeva in più una completa padronanza dei mezzi matematici allora disponibili.

Faremo vedere, ora, come si possa dedurre, dalle leggi di campo di Maxwell [62], che le forze elettromagnetiche si propagano con velocità finita. A tale scopo, ci limiteremo a considerare eventi che si verificano nel vuoto o nell'etere. Quest'ultimo non ha conduttività ($\sigma=0$), e non possiede cariche vere ($\rho=0$); inoltre ha costante dielettrica e permeabilità uguali a 1 ($\epsilon=1, \mu=1$). Le prime due equazioni di campo [62] affermano allora che

$$\operatorname{div} E=0, \quad \operatorname{div} H=0 \quad [63]$$

cioè che tutte le linee di forza o sono chiuse, o vanno all'infinito. Per ottenere una descrizione approssimata del processo, consideriamo delle singole linee di forza chiuse.

Le altre due equazioni di campo si scrivono:

$$(a) \frac{E}{\tau} = c \operatorname{rot} H, \quad (b) \frac{H}{\tau} = -c \operatorname{rot} E. \quad [64]$$

Supponiamo, ora, che in una certa regione limitata dello spazio ci sia un campo elettrico E , il quale, nel piccolo intervallo di tempo τ , vari di una quantità E ; la sua variazione nell'unità di tempo è allora data da E/τ . Secondo la prima equazione, il campo elettrico E è immediatamente circondato da un campo magnetico di intensità

proporzionale a E/τ . Anche tale campo magnetico varierà nel tempo, per esempio di una quantità H per ciascun piccolo intervallo successivo τ . Dalla seconda equazione, si trae che la sua variazione nell'unità di tempo, H/τ , induce immediatamente un campo elettrico ad esso concatenato. Nell'intervallo di tempo successivo il campo elettrico così generato, come si vede dalla prima equazione, induce di nuovo un campo magnetico che lo circonda; si ha quindi un processo a catena, che continua con velocità finita (fig. 98).

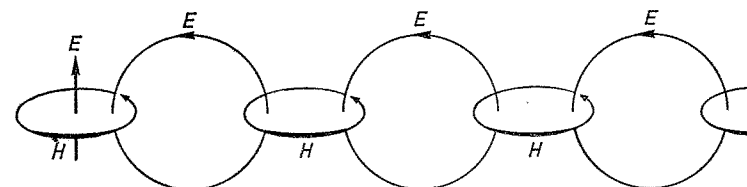


Fig. 98. Campi elettrici e magnetici concatenati per induzione.

Naturalmente questa descrizione del processo, che si propaga in effetti con continuità in tutte le direzioni, è soltanto approssimata; una rappresentazione migliore verrà data più avanti.

Ci interessa qui particolarmente quanto segue: come è noto dalla meccanica, il fatto che la velocità di propagazione delle onde elastiche sia finita è una conseguenza dei ritardi dovuti all'inerzia che si riscontra tutte le volte che in un corpo si ha trasmissione di forze da punto a punto. Questo risultato è espresso dall'equazione [36] $\rho a = p f$, da cui, in base alla [37] $c^2 = p/\rho$, si ottiene:

$$a = c^2 f, \quad [36a]$$

dove c^2 denota il quadrato della velocità delle onde elastiche, a l'accelerazione delle particelle materiali del corpo elastico (cioè la derivata del secondo ordine rispetto al tempo), e f è la derivata del secondo ordine rispetto allo spazio.

Nel caso del campo elettromagnetico, si ha all'incirca la stessa

cosa. La sola differenza che si riscontra consiste nel fatto che, ora, invece di avere la dipendenza dello spostamento dallo spazio e dal tempo, come avviene nel caso elastico, risultano dipendenti dallo spazio e dal tempo le due grandezze E e H . La variazione (nell'unità di tempo) del campo elettrico, E/τ , determina il campo magnetico H , la cui variazione H/τ , in seguito, dà luogo al campo elettrico E in un punto vicino. Le equazioni [64] contengono soltanto quantità differenziali del primo ordine, per esempio E/τ , che rappresenta una derivata del primo ordine rispetto al tempo, e $\text{rot } H$, che è un'espressione differenziale del primo ordine rispetto allo spazio. Un'equazione analoga alla [36] si può ottenere in base al seguente procedimento: per cominciare, consideriamo la derivata del primo ordine rispetto al tempo dell'equazione [64a]. Avremo allora, a primo membro dell'equazione che vogliamo stabilire, la derivata di E , rispetto al tempo, del secondo ordine, che è l'analoga di a della [36a] e che chiameremo a_E . A secondo membro, avremo una espressione differenziale mista del secondo ordine (formata dalla derivata seconda mista rispetto allo spazio e al tempo, o viceversa). La stessa derivata mista si può ottenere dalla [64b], partendo dalla derivata del primo ordine rispetto allo spazio. Si può vedere allora che la derivata mista è uguale al prodotto di c per la derivata di E del secondo ordine rispetto allo spazio; questa è analoga alla quantità f della [36a], ed è naturale quindi chiamarla f_E . Eliminando nelle equazioni la derivata mista, si ottiene:

$$a_E = c^2 f. \quad [65]$$

Questa equazione è completamente analoga alla [36a] e mostra l'esistenza di onde elettriche di velocità c . Basandosi sullo stesso metodo, si può derivare un'equazione analoga nel caso del campo magnetico H ($a_H = c^2 f_H$). Se uno dei due effetti parziali si verificasse senza ritardo, le forze elettriche non potrebbero propagarsi sotto forma di onde; questo fatto sottolinea l'importanza che riveste la corrente di spostamento di Maxwell, in quanto è proprio ad essa che è dovuta la variazione (nell'unità di tempo) E/τ del campo elettrico.

Daremo ora una descrizione del processo di propagazione di un'onda elettromagnetica. Consideriamo due sfere metalliche aventi cariche uguali e opposte, $+e$ e $-e$, abbastanza grandi, di modo che esse possano produrre un intenso campo elettrico. Supponiamo poi che tra le sfere si verifichi una scintilla. Le cariche allora si neutralizzano a vicenda; di conseguenza, la variazione E/τ che il campo elettrico subisce nell'unità di tempo sarà molto grande. La figura 99

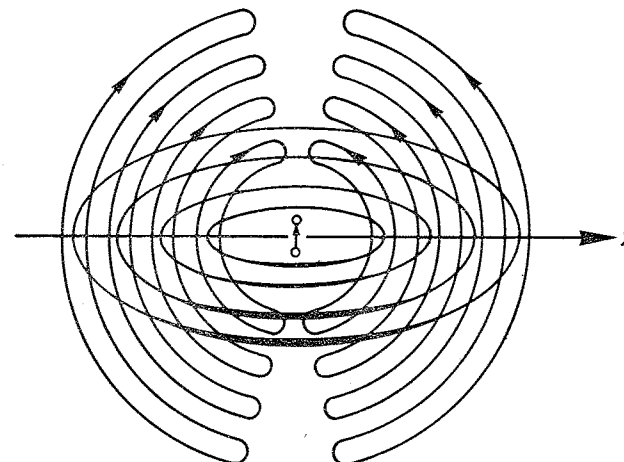


Fig. 99. Campo elettromagnetico generato da due sfere fra cui si produce una scarica. Il campo si espande in tutte le direzioni con la velocità c della luce.

mostra come si circondino a vicenda le linee di forza magnetiche ed elettriche. Nel nostro grafico le linee di forza magnetiche sono disegnate soltanto nel piano mediano tra le due sfere; le linee di forza elettriche, soltanto nel piano del foglio, il quale è perpendicolare al piano mediano. L'intera figura è naturalmente a simmetria radiale rispetto alla linea che unisce i centri delle sfere. Ogni successiva linea di forza chiusa è più debole di quella che immediatamente la precede, in quanto si trova esternamente più lontana e ha una circonferenza maggiore. Conseguentemente la parte interna di

una linea di forza elettrica chiusa non controbilancia affatto la parte esterna di quella che la precede, specialmente perché essa entra in azione un po' in ritardo.

Se si considera il processo lungo una retta perpendicolare alla congiungente i centri delle sfere, per esempio lungo l'asse x , si vede che sia le linee di forza elettriche che quelle magnetiche sono sempre perpendicolari a tale asse, e, inoltre, fra loro. Questo è vero qualunque sia la direzione di propagazione. Perciò l'onda elettromagnetica è esattamente trasversale. Inoltre essa è polarizzata; abbiamo, tuttavia, ancora la possibilità di considerare, come fattore determinante dell'oscillazione, l'intensità del campo elettrico o quella del campo magnetico.

Si è così fatto vedere che la velocità delle onde è uguale alla costante c , e che le onde sono trasversali. Inoltre, poiché secondo Weber e Kohlrausch il valore di c è uguale a quello della velocità della luce c , Maxwell fu in grado di concludere che *le onde luminose non sono nient'altro che onde elettromagnetiche*.

Fra le deduzioni a cui pervenne Maxwell, ce n'è una che fu subito confermata sperimentalmente, entro certi limiti. Egli infatti calcolò la velocità della luce c_1 nel caso di un corpo isolante ($\sigma=0$) e in assenza di cariche libere ($\rho=0$). Le equazioni di Maxwell [62, c e d] mostrano che si ottengono equazioni quasi identiche alle [64], ma con altri valori per c . Nella [64a] si deve sostituire c con c/ϵ , e nella [64b] con c/μ . In base agli stessi argomenti che ci hanno condotto all'equazione [65], si trae ora che il quadrato della velocità c_1^2 delle onde elettromagnetiche dev'essere uguale al prodotto di c/ϵ per c/μ : $c_1^2 = c^2/\epsilon\mu$. Esistono molti materiali che sono scarsamente magnetizzabili, quindi possiamo porre $\mu=1$; ciò significa che la velocità della luce, in un coibente di costante dielettrica ϵ , è data da $c_1 = c/\sqrt{\epsilon}$. Questo porta al valore $n = c/c_1 = \sqrt{\epsilon}$ dell'indice di rifrazione.

Si potrebbe pertanto determinare l'indice di rifrazione della luce ricorrendo soltanto a misure elettriche. Ciò vale per alcuni gas (ad esempio idrogeno, anidride carbonica, aria) come mostrò L. Boltzmann. Per altre sostanze la relazione di Maxwell $n = \sqrt{\epsilon}$ non è cor-

retta; in tutti questi casi infatti l'indice di rifrazione non è costante, ma dipende dal colore (frequenza) della luce. Questo indica che la dispersione della luce dà luogo a un effetto di disturbo. Ritorreremo più avanti su tale fatto, che verrà considerato dal punto di vista della teoria degli elettroni. In ogni caso, è chiaro che tanto più lente sono le vibrazioni, cioè tanto più "lunghe" sono le onde della radiazione che si considera, quanto più il valore della costante dielettrica, determinato staticamente, si avvicina al quadrato dell'indice di rifrazione. Onde con periodo di oscillazione infinito coincidono naturalmente con uno stato stazionario. Ricerche intraprese nella regione delle onde lunghe (lunghezze dell'ordine dei centimetri) hanno pienamente confermato la formula di Maxwell.

Per quanto concerne le leggi relative ai fenomeni ottici che presentano principalmente un carattere geometrico, vale a dire la riflessione, la rifrazione, la doppia rifrazione, la polarizzazione nei cristalli e così via, la teoria elettromagnetica è in grado di risolvere tutte quelle difficoltà che nell'ambito delle teorie dell'etere elastico erano del tutto insuperabili. In esse, l'ostacolo maggiore era costituito dall'esistenza di onde longitudinali che si manifestavano quando la luce attraversava la superficie di separazione tra due mezzi, e che avrebbero potuto essere eliminate soltanto in base a delle ipotesi, affatto improbabili, sulla natura dell'etere. Le onde elettromagnetiche sono sempre rigorosamente trasversali, quindi tale difficoltà non si presenta. Formalmente la teoria di Maxwell è quasi identica alla teoria dell'etere di MacCullagh, come già in precedenza abbiamo ricordato (p. 149), e di cui, senza ripetere i calcoli, possiamo accettare le deduzioni più importanti.

Non possiamo in questa sede esaminare a fondo gli ulteriori sviluppi dell'elettrodinamica. Il legame tra luce ed elettromagnetismo divenne sempre più stretto. Si scoprivano continuamente nuovi fenomeni, che mettevano in evidenza l'influenza esercitata sulla luce dal campo elettrico e dal campo magnetico. Si trovò che questi fenomeni erano tutti in accordo con le leggi di Maxwell, che diventavano di conseguenza sempre più attendibili.

Tuttavia, la prova decisiva che l'ottica e l'elettromagnetismo dovevano essere considerati come manifestazioni diverse dello stesso fenomeno, fu data da Heinrich Hertz (1888), quando egli dimostrò che la velocità di propagazione delle forze elettromagnetiche è finita e quando riuscì effettivamente a realizzare delle onde elettromagnetiche. Egli fece scoccare delle scintille attraverso lo spazio compreso fra due sfere cariche; in tal modo generò delle onde simili a quelle rappresentate nel nostro diagramma (fig. 99). Quando tali onde incontravano un filo metallico circolare munito di una piccola apertura, producevano in esso delle correnti che si manifestavano con piccole scintille all'apertura. Hertz riuscì a riflettere e a far interferire queste onde; ciò gli permise di misurarne la lunghezza d'onda. Poiché gli era nota la frequenza delle oscillazioni, egli fu in grado quindi di calcolare la velocità delle onde, che risultò uguale a quella della luce, c . Tutto ciò rappresentò una conferma diretta dell'ipotesi di Maxwell. Oggi le onde hertziane provenienti dalle stazioni della radio viaggiano sulla terra incessantemente e rendono omaggio ai due grandi scienziati Maxwell e Hertz; il primo predisse l'esistenza delle onde elettromagnetiche, mentre il secondo riuscì a realizzarle effettivamente.

10. *L'etere elettromagnetico*

D'allora in poi si ritenne che esistesse un solo tipo di etere attraverso il quale dovevano propagarsi tutti i fenomeni elettrici, magnetici e ottici. Ben poco però era noto sull'effettiva natura di questo mezzo, se non che doveva soddisfare alle equazioni di Maxwell, né si sapeva in che cosa consistesse realmente il campo elettromagnetico, e quale fosse l'ente che vibra nelle onde luminose.

Ricordiamo che alla base delle argomentazioni di Maxwell vi era il concetto di spostamento, che abbiamo spiegato ammettendo l'esistenza nelle molecole di etere, come nelle molecole di materia, di uno spostamento effettivo e di una separazione di cariche del fluido elettrico (o magnetico). Quest'idea, valida certamente per ciò che con-

cerne il processo di polarizzazione elettrica della materia, ha trovato un'ulteriore applicazione nella teoria degli elettroni, che è una moderna rielaborazione della teoria di Maxwell, dal momento che numerosi esperimenti hanno confermato come la materia abbia una struttura molecolare e ogni molecola possieda una carica di polarizzazione. Non si può invece dire altrettanto nel caso dell'etere libero, dove l'idea di Maxwell mantiene un carattere di pura ipotesi e ha il solo pregio di consentire una chiara descrizione delle leggi astratte del campo.

Queste leggi affermano che ad ogni variazione nel tempo dello spostamento è associato un campo di forza elettromagnetico. È possibile dare una descrizione meccanica di questa relazione?

Maxwell stesso costruì dei modelli meccanici per l'etere e li applicò con un certo successo; ma dotato di particolare inventiva in questa direzione fu Lord Kelvin, che cercò incessantemente di interpretare fenomeni elettromagnetici in termini di oscuri meccanismi e forze.

Il carattere rotazionale della relazione fra correnti elettriche e campi magnetici e la loro reciprocità, suggeriscono l'ipotesi che lo stato elettrico dell'etere sia dovuto a uno spostamento lineare, e lo stato magnetico a una rotazione attorno a un asse, o viceversa. Queste idee ci riportano alla teoria dell'etere di MacCullagh, secondo cui l'etere non oppone alcuna resistenza alle deformazioni longitudinali, ma soltanto alle rotazioni dei suoi elementi di volume. È chiaro che se volessimo tener conto delle numerose, e a volte fantastiche, ipotesi sulla natura dell'etere, finiremmo per allontanarci troppo dal nostro scopo: inoltre esse ci porterebbero a concepire l'etere come un mostruoso meccanismo formato di ruote dentate, giroscopi e ingranaggi complicatissimi, di cui nulla sarebbe visibile, tranne poche e relativamente semplici caratteristiche, che dovrebbero presentarsi come un campo elettromagnetico.

Esistevano naturalmente altre teorie meno macchinose e, in certi casi, ingegnose, in cui per esempio l'etere era considerato come un fluido il cui flusso rappresentava il campo elettrico, e i vortici, il campo magnetico. Bjerknes aveva proposto una teoria in cui le cariche elettriche erano sfere pulsanti nell'etere fluido, e aveva dimo-

strato che fra tali sfere si esercitavano delle forze molto simili a quelle elettromagnetiche.

Se pensiamo al significato e al valore di tali teorie, dobbiamo ammettere che, sia pure abbastanza di rado, esse suggerirono nuovi esperimenti e portarono alla scoperta di nuovi fenomeni. Più spesso però, si eseguirono elaborate e complesse ricerche sperimentali per decidere fra due teorie ugualmente improbabili e fantastiche, sprestando in tal modo molte energie. Ancor oggi vi è chi ritiene che una spiegazione meccanicistica dell'etere elettromagnetico risponda in qualche modo ai criteri della logica. Simili teorie continuano ad affiorare, e naturalmente diventano sempre più astruse man mano che aumenta il numero di fatti sperimentali da interpretare; il loro compito diventa quindi sempre più difficile.

Fu Heinrich Hertz ad allontanarsi deliberatamente da qualsiasi speculazione meccanicistica. Ecco la sostanza del suo pensiero: "Nell'interno di ogni corpo, compreso l'etere elastico, possono verificarsi, a partire da uno stato iniziale di quiete, alcuni disturbi che chiameremo elettrici ed altri che chiameremo magnetici. Noi non conosciamo la natura di queste variazioni di stato, ma soltanto i fenomeni che derivano da esse." Questa esplicita rinuncia a una spiegazione meccanicistica fu di estrema importanza da un punto di vista metodologico e aprì la strada ai grandi progressi delle ricerche di Einstein. Le proprietà meccaniche dei solidi e dei fluidi, note dall'esperienza diretta, non ci danno che una descrizione sommaria del loro comportamento. I più recenti studi di fisica molecolare hanno dimostrato che queste proprietà visibili sono in certo senso apparenti e illusorie, dovute più che altro alla limitatezza dei nostri metodi di osservazione, mentre l'effettivo comportamento dei componenti più piccoli della materia, gli atomi, le molecole, gli elettroni, è governato da leggi abbastanza differenti. È quindi piuttosto semplicistico ritenere che ogni mezzo continuo, come l'etere, abbia una struttura simile a quella, apparentemente continua, che i nostri sensi molto limitati attribuiscono ai corpi fluidi e solidi. Le proprietà dell'etere vanno piuttosto ottenute studiando quanto si verifica in esso, indi-

pendentemente da ciò che abbiamo sperimentato in altri campi. Esse si sintetizzano in questo modo: lo stato dell'etere può essere descritto mediante due grandezze vettoriali, che prendono il nome di *intensità del campo elettrico e magnetico*, E e H , le cui variazioni nello spazio e nel tempo sono espresse dalle equazioni di Maxwell. In determinate circostanze essi generano nella materia azioni meccaniche, termiche e chimiche, che possono essere misurate.

Qualsiasi ipotesi che vada oltre questa asserzione è superflua e illusoria. Si potrebbe obiettare che un punto di vista così astratto indebolisce la capacità inventiva dello scienziato, che è stimolato dalla possibilità di visualizzare certi fenomeni e di stabilire delle analogie; ma proprio l'esempio di Hertz contraddice questa opinione, poiché raramente la fisica ha avuto uno sperimentatore dotato di tale ingegnosa e un teorico così convinto della validità della pura astrazione.

11. *La teoria di Hertz dei conduttori in moto*

Una questione più importante del problema dell'interpretazione meccanica dell'etere riguarda l'influenza che il moto dei corpi (fra i quali va compreso anche l'etere) ha sui fenomeni elettromagnetici. Questo ci riporta, ma da un punto di vista più generale, alle discussioni fatte in precedenza (p. 150) sull'ottica dei corpi in movimento; solo che ora l'ottica non è che un capitolo dell'elettrodinamica e non esiste alcuna differenza fra etere luminoso ed etere elettromagnetico. Tutte le precedenti conclusioni sul comportamento dell'etere luminoso basate sull'osservazione dei fenomeni ottici, mantengono la loro validità; esse erano quasi del tutto indipendenti dal meccanismo delle vibrazioni luminose e si riferivano soltanto alle caratteristiche geometriche delle onde, cioè la frequenza (effetto Doppler), la velocità (trascinamento) e la direzione di propagazione (aberrazione).

Abbiamo già visto che nel periodo in cui si andava sviluppando la teoria elettromagnetica della luce, le uniche quantità misurabili erano del prim'ordine in $\beta=v/c$. Il risultato di tali osservazioni potrebbe essere sintetizzato in un "principio di relatività ottica": i feno-

meni luminosi dipendono soltanto dal moto relativo dei corpi che emettono, trasmettono o ricevono luce. In un sistema di riferimento in moto uniforme rispetto all'etere tutti i fenomeni ottici si verificano come se esso fosse a riposo.

Nel tentativo di spiegare questa circostanza, si formularono due teorie: quella di Stokes supponeva che l'etere fosse trascinato completamente dalla materia, mentre la teoria di Fresnel prevedeva soltanto un trascinamento parziale, misurabile sperimentalmente. Come abbiamo visto la teoria di Stokes, portata alle sue conclusioni logiche, incontrava molteplici difficoltà, mentre quella di Fresnel consentiva una soddisfacente descrizione dei fenomeni.

Le stesse due posizioni sono possibili anche nell'ambito della teoria elettromagnetica; resta da vedere però se le osservazioni sperimentali consentano una scelta fra le due ipotesi.

Hertz fu il primo ad applicare l'idea di un trascinamento completo alle equazioni di Maxwell, ben sapendo comunque che tale modo di procedere doveva mantenere un carattere provvisorio, poiché anche nello studio dei fenomeni ottici si sarebbero incontrate le stesse difficoltà che avevano decretato il fallimento della teoria di Stokes. Ciò nonostante la semplicità di una teoria che non richiedeva alcuna distinzione fra il moto dell'etere e quello della materia, lo convinse a sviluppare in modo particolare quest'ipotesi. Ciò consentì di scoprire che la teoria di Hertz spiegava correttamente i fenomeni di induzione nei *conduttori* in moto, che sono di gran lunga i materiali più importanti per la fisica sperimentale e per le scienze applicate. Un disaccordo con i risultati sperimentali si aveva soltanto nel caso di esperimenti più raffinati, dove diventavano importanti fenomeni di induzione dovuti ai materiali *isolanti*. Studieremo ora le seguenti quattro possibilità:

- 1) Conduttori in moto
 - a) in un campo elettrico,
 - b) in un campo magnetico.
- 2) Isolanti in moto
 - a) in un campo elettrico,
 - b) in un campo magnetico.

1a) Un conduttore in un campo elettrico acquista una densità di carica superficiale; posto in movimento, esso trascina con sé queste cariche. Ma un moto di cariche è equivalente a una corrente, e quindi genera, secondo la legge di Biot e Savart, un campo magnetico circostante. Per avere una descrizione di ciò che succede, pensiamo ad un condensatore piano le cui armature siano parallele al piano x, z (fig. 100). Sia σ la densità di carica superficiale; allora se f è l'area

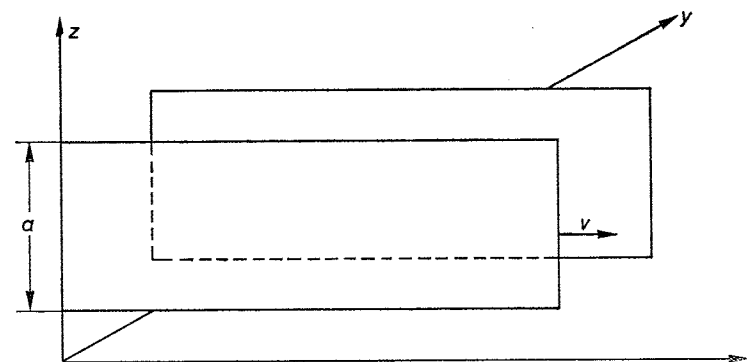


Fig. 100. Un'armatura carica di un condensatore si muove con velocità v perpendicolare al campo elettrico.

di un'armatura, $e = \sigma \cdot f$ è la quantità di carica da essa posseduta. Supponiamo ora che un'armatura si muova con velocità v rispetto all'etere, nella direzione dell'asse x : ciò darà luogo ad una *corrente di trascinamento*. Infatti, poiché l'armatura si muove con velocità v e percorre nel tempo τ un tratto $v \cdot \tau$, detta a l'altezza in direzione z del condensatore, la quantità di carica $e = \sigma \cdot a \cdot v \cdot \tau$ attraverserà nel tempo τ una superficie parallela al piano y, z , generando così una corrente $J = e/\tau = \sigma \cdot a \cdot v$. Questa corrente dovrà esercitare un'azione magnetica esattamente uguale a quella di una corrente di intensità J che scorra fra le armature di un condensatore a riposo.

Ciò fu confermato sperimentalmente nel laboratorio di Helmholtz

da H. A. Rowland (1875) e, in seguito, con maggior precisione da A. Eichenwald con un esperimento in cui invece di un'armatura in moto rettilineo si usò un disco metallico rotante.

1b) In un conduttore in moto in un campo magnetico si generano dei campi elettrici e quindi delle correnti. È questo il fenomeno dell'induzione di movimento, che Faraday scoprì e trattò da un punto di vista quantitativo. Il caso più semplice è il seguente: consideriamo un campo magnetico parallelo all'asse z prodotto, ad esempio, da un magnete a ferro di cavallo, e supponiamo che fra le sue espansioni polari si muova con velocità v in direzione dell'asse x una sbarretta metallica di lunghezza l , disposta parallelamente all'asse y . Se inseriamo questa sbarretta in un circuito chiuso facendola scorrere lungo i lati opposti di un conduttore metallico disposto a \mathbf{U} in modo che quest'ultimo non partecipi al moto (fig. 101), il circuito sarà attraversato da una corrente di induzione J , che si ottiene nel modo più semplice esprimendo la legge di Faraday in questa forma: la corrente indotta in una sbarretta appartenente a un circuito chiuso è proporzionale alla variazione nell'unità di tempo del numero di linee di

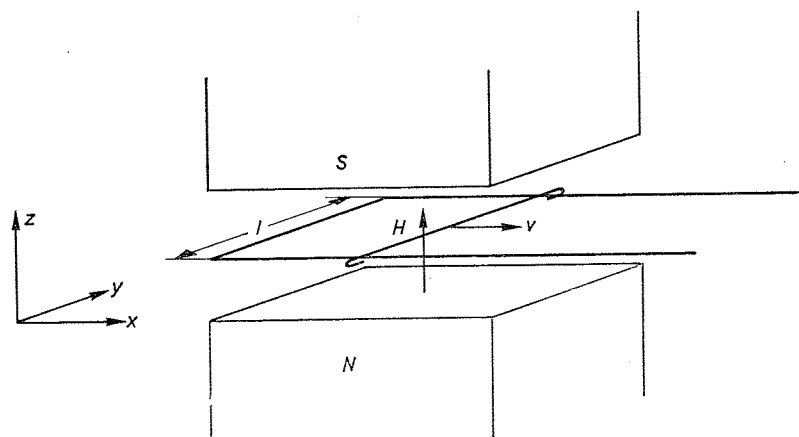


Fig. 101. Una sbarretta di lunghezza l , appartenente a un circuito chiuso, si muove fra le espansioni di un magnete a ferro di cavallo.

forza ad essa concatenate. Questa variazione si ottiene moltiplicando l'induzione magnetica riferita a una superficie unitaria μH per l'area f spazzata dalla sbarretta. Nel capitolo dedicato all'induzione magnetica (p. 215) avevamo considerato il caso in cui una variazione di questa quantità era dovuta ad una variazione H di H in un intervallo τ . Ora invece essa è una conseguenza di una variazione dell'area f prodotta dal moto della sbarretta. Poiché la sua lunghezza è l e la sua velocità, in direzione perpendicolare a y , è v , l'area spazzata in un secondo sarà $l \cdot v$: questa quantità rappresenta la variazione di f . La variazione al secondo del numero di linee di forza è quindi $v \cdot l \cdot \mu \cdot H$. Secondo la legge di induzione di Faraday la sbarretta è percorsa da una corrente indotta J ; ma in luogo di questa corrente, è preferibile esprimere l'effetto dell'induzione in termini di una differenza di potenziale V prodotta fra gli estremi della sbarra. Si dimostra sperimentalmente che V è proporzionale alla quantità precedentemente calcolata, $v \cdot l \cdot \mu \cdot H$; per quanto riguarda il fattore di proporzionalità si è scoperta una importante proprietà di simmetria. Se misuriamo tutte le quantità con le nostre unità di misura, questa costante deve valere $1/c$, e quindi l'equazione diventa $V = (1/c) v l \mu H$. Ciò equivale a dire che la sbarretta è sede di un campo elettrico $E = V/l = (v/c) \mu H$. Se la sbarretta si muovesse senza far parte di un circuito chiuso, ai suoi estremi si genererebbero delle cariche in corrispondenza di questo campo elettrico, per tutto il tempo in cui essa è in movimento.

Questa legge è il principio di funzionamento di tutte quelle macchine della fisica e dell'elettrotecnica in cui l'energia di movimento viene trasformata per effetto dell'induzione in energia elettromagnetica; ricordiamo, a titolo di esempio, il telefono e tutti i diversi tipi di dinamo. Possiamo concludere quindi che questa legge ha avuto un gran numero di conferme sperimentali.

2a) Immaginiamo che il moto di un corpo non conduttore in un campo elettrico sia realizzato nel seguente modo: un disco mobile formato di materiale isolante è posto fra le due armature del con-

densatore di figura 100 (vedi fig. 102); esso riempie totalmente lo spazio compreso fra le armature e quindi la distanza a segnata nella figura 100 misura anche la larghezza del disco. Se il condensatore viene caricato, il disco è sede di un campo elettrico E e di una induzione dielettrica εE , perpendicolare al piano delle armature,

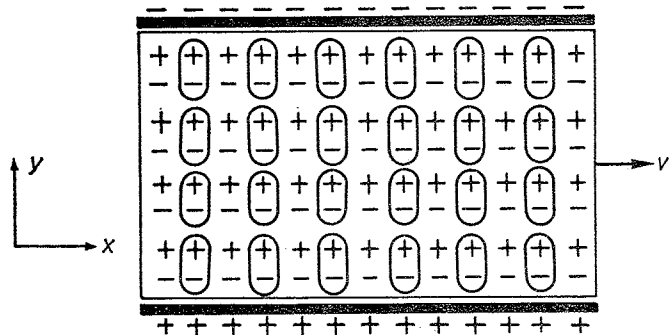


Fig. 102. Se un condensatore riempito con un disco di materiale isolante viene caricato, sulla superficie del disco si distribuiscono delle cariche indotte, prodotte nel dielettrico dallo spostamento. Una parte di queste cariche (dipoli \pm) è dovuta alla presenza dell'etere, un'altra (dipoli \oplus) all'isolante. Se il disco isolante è in movimento esso trascina nel moto solo questi ultimi dipoli.

cioè parallela all'asse y . Le due superfici che limitano il disco isolante si caricano in modo opposto alle armature ad esse, rispettivamente, contigue. La densità di carica superficiale σ è proporzionale all'induzione D nel dielettrico: $4\pi\sigma = D = \varepsilon E$. D è formato di due parti, una $D_e = E$, dovuta alla presenza dell'etere, l'altra $D_m = D - D_e$ dovuta alla presenza del dielettrico.

Supponiamo ora che lo strato isolante si muova nella direzione dell'asse x con velocità v : secondo la teoria di Hertz, l'etere sarà completamente trascinato e di conseguenza anche il campo E e le cariche di densità $\sigma = \varepsilon E / 4\pi$ che il campo ha prodotto sulle superficie del disco, prenderanno parte a questo moto.

Ciò rappresenta come al solito una corrente $(\varepsilon E / 4\pi) \cdot a \cdot v$ e quindi, secondo la legge di Biot e Savart, un campo magnetico.

W. C. Röntgen verificò sperimentalmente (1885) questo fenomeno, ma la deviazione dell'ago magnetico osservata fu molto minore di quella prevista dalla teoria di Hertz. I suoi esperimenti dimostrarono che solo la densità di carica non dovuta all'induzione dell'etere partecipa al moto (cioè $D - D_e = E(\varepsilon - 1) = D_m$, che rappresenta l'induzione del dielettrico). Daremo nel seguito una semplice spiegazione di questo risultato; per ora ci limitiamo ad affermare che, com'era previsto da alcune ben note esperienze di ottica, la teoria di Hertz fallisce nel tentativo di spiegare i fenomeni elettromagnetici.

Nel 1903 Eichenwald diede una conferma veramente sorprendente dei risultati di Röntgen, in una esperienza in cui anche le armature cariche prendevano parte al moto.

Queste davano un contributo alla corrente pari a $\sigma \cdot a \cdot v = (\varepsilon E / 4\pi) \cdot v$; secondo la teoria di Hertz la corrente generata nello strato isolante, tenuto conto dell'esistenza di cariche uguali e di segno contrario, doveva compensare questo valore. Ma Eichenwald dimostrò che le cose andavano diversamente: egli ottenne per la corrente un valore del tutto indipendente dal materiale usato, esattamente com'era previsto dai risultati già discussi di Röntgen. Infatti il primo termine della corrente dovuta al dielettrico

$$\left(\frac{\varepsilon E}{4\pi} - \frac{E}{4\pi} \right) \cdot a \cdot v,$$

era compensato dalla corrente generata dal moto delle armature e quindi restava soltanto il termine $(E / 4\pi) \cdot a \cdot v$, indipendente dalla costante dielettrica ε .

2b) Consideriamo un campo magnetico parallelo all'asse z , prodotto da un magnete a ferro di cavallo, e un disco di materiale isolante che si muova attraverso il campo nella direzione dell'asse x (fig. 103); la permeabilità magnetica dell'isolante sia $\mu = 1$. Supponiamo che le due facce del disco perpendicolari all'asse y siano rico-

parte di uno strato metallico e quindi connesse a un elettrometro per mezzo di contatti striscianti, in modo che possano essere rivelate le cariche prodotte su di esse.

Questo esperimento è del tutto analogo all'esperimento di induzione discusso poco fa (1*b*), con la sola differenza che al posto di un

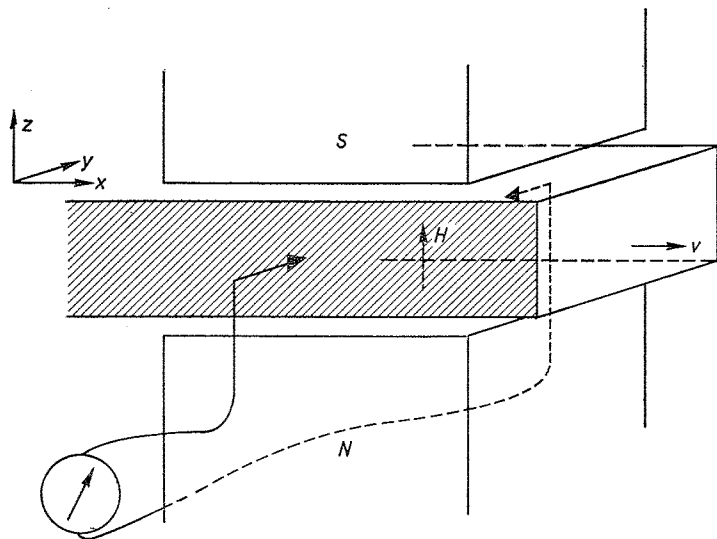


Fig. 103. Un pezzo di materiale isolante viene posto in moto in un campo magnetico per misurare la densità di carica indotta sulla sua superficie.

conduttore in movimento vi è ora un dielettrico. La legge di induzione può quindi essere applicata allo stesso modo. Essa richiede l'esistenza di un campo elettrico $E = H(v/c)$, che agisca sull'isolante in direzione dell'asse y . Secondo la teoria di Hertz quindi, i due strati devono possedere densità di cariche superficiali opposte

$$\frac{\epsilon E}{4\pi} = \frac{\epsilon H v}{4\pi c}$$

che daranno luogo a una deviazione dell'elettrometro. Quest'esperi-

mento, eseguito da H. F. Wilson nel 1905 con un dielettrico rotante, confermò naturalmente la presenza di una carica indotta, ma con un valore ancora più piccolo, corrispondente cioè ad una densità $(\epsilon - 1)(H/4\pi)(v/c)$. Ciò significa che l'unico effetto presente è dovuto al moto della sostanza isolante e non dell'etere. Ancora una volta quindi la teoria di Hertz si rivelava errata.

In ognuno di questi fenomeni, ciò che conta è solo il moto relativo dei corpi che producono il campo rispetto al conduttore o al dielettrico. Il risultato non sarebbe cambiato se, invece di muovere il materiale nella direzione x , come abbiamo fatto, lo avessimo lasciato fermo e avessimo trasportato la parte restante dell'apparecchiatura nella direzione negativa dell'asse x . Infatti nella teoria di Hertz, in cui l'etere è una sostanza materiale, si considerano soltanto i moti relativi dei corpi. In un sistema in moto con velocità costante quindi tutto avviene, secondo Hertz, come se l'etere fosse in uno stato di quiete; vale cioè il principio classico della relatività.

Ma la teoria di Hertz, incompatibile con la realtà dei fenomeni, dovette essere ben presto sostituita da un'altra, che assunse un atteggiamento opposto nei confronti della relatività.

12. La teoria dell'elettrone di Lorentz

La teoria che H. A. Lorentz propose nel 1892 rappresentò il culmine e l'ultimo stadio della fisica dell'etere materiale.

Si tratta di una teoria dell'elettricità in cui si suppone l'esistenza di un solo fluido e che si sviluppa su basi atomiche; è proprio questa caratteristica che, come vedremo immediatamente, determina la parte assegnata all'etere.

Il fatto che le cariche elettriche abbiano una struttura atomica, siano cioè quantità piccolissime e indivisibili, fu stabilito per la prima volta da Helmholtz (nel 1881) nel tentativo di spiegare le leggi di Faraday per l'elettrolisi (p. 193). In effetti, la sola ipotesi che ogni atomo presente in una soluzione elettrolitica abbia una specie di legame chimico con un atomo di elettricità, cioè un elettrone, è

sufficiente a spiegare perché la quantità di sostanza liberata è sempre proporzionale alla quantità di elettricità.

L'ipotesi di una struttura atomica dell'elettricità si dimostrò di particolare valore per spiegare i fenomeni osservati al passaggio di una corrente elettrica attraverso un gas rarefatto. Fu in questo caso che si scoprì per la prima volta il diverso comportamento seguito dalle cariche positive e negative. Se in un tubo di vetro si introducono due elettrodi metallici e si fa in modo che essi siano attraversati da una corrente, i fenomeni che così si producono sono piuttosto complicati, almeno finché la pressione del gas nel tubo è apprezzabile. Tali fenomeni diventano progressivamente più semplici man mano che il gas viene estratto dal tubo (fig. 104). Quando il

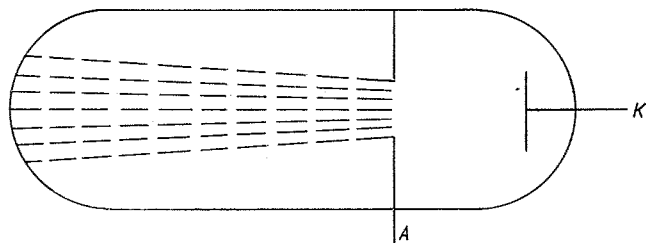


Fig. 104. Un tubo per produrre raggi catodici: K è il catodo, A l'anodo.

vuoto è abbastanza spinto, l'elettrodo negativo, il catodo K , emette dei raggi che raggiungono attraverso un foro l'elettrodo positivo, l'anodo A , e vengono osservati per fluorescenza su uno schermo posto dietro A (si pensi ad esempio a uno schermo televisivo). È possibile dimostrare che questi raggi, detti *raggi catodici*, sono deviati da un campo magnetico esattamente come un flusso d'elettricità negativa. Un'ulteriore conferma di questo fatto si può avere facendo confluire questi raggi in un conduttore cavo; sottoposti successivamente all'azione di un campo elettrico perpendicolare al loro percorso, essi mostrerebbero una deviazione opposta alla direzione del campo, il che proverebbe di nuovo che la loro carica è

negativa. Gli studi più importanti sulla natura dei raggi catodici furono compiuti da J. J. Thomson e da P. L. Lenard.

L'ipotesi che i raggi catodici fossero di natura corpuscolare diventò una certezza quando i fisici riuscirono a calcolarne la velocità e la carica.

Se immaginiamo un raggio catodico come un flusso di corpuscoli di massa m_{el} , è chiaro che quanto più grande è la loro velocità tanto meno saranno deviati da un campo elettrico o magnetico, proprio come la traiettoria di un proiettile tanto più si avvicina a una traiettoria rettilinea quanto maggiore è la sua velocità. In effetti stabilendo una piccola differenza di potenziale fra catodo e anodo si può fare in modo che i raggi catodici subiscano una forte deviazione. Se viceversa la differenza di potenziale fra i due poli fosse elevata, sotto l'azione del campo i raggi sarebbero fortemente accelerati da K ad A . La velocità dei raggi catodici oltre il foro praticato in A dipende soltanto dall'accelerazione subita da K verso A ; tale accelerazione può essere calcolata mediante l'equazione fondamentale della meccanica

$$m_{el} \cdot a = F = eE,$$

dove e è la carica ed E l'intensità del campo. Siamo quindi di fronte a un fenomeno analogo alla caduta dei gravi, con la differenza che a non è uguale all'accelerazione di gravità g ma vale $(e/m_{el})E$. Se fosse noto il rapporto e/m_{el} , la velocità v potrebbe essere calcolata secondo le leggi della caduta dei gravi. Ma in questo caso le incognite sono due, e/m_{el} e v , e per calcolarle dobbiamo eseguire una seconda misurazione. A tal fine applichiamo un campo magnetico perpendicolare al raggio: discutendo la teoria di Hertz (p. 236, 1b)) abbiamo visto che un campo magnetico H genera, in un corpo in moto in direzione perpendicolare ad esso, un campo elettrico $E=(v/c)H$, perpendicolare ad H e a v . Su ogni particella del raggio catodico agirà quindi una forza $eE=e(v/c)H$ a cui corrisponderà un'accelerazione

$$a = \frac{e}{m_{el}} \frac{v}{c} H$$

perpendicolare alla direzione del moto. Quest'ultima potrà essere calcolata misurando la deflessione laterale subita dal raggio. Abbiamo così a disposizione una seconda equazione per calcolare le due incognite e/m_{el} e v .

I valori ottenuti in questo modo o con metodi simili, hanno portato al risultato che, per velocità non troppo grandi, e/m_{el} è costante e vale:

$$e/m_{el} = 5,31 \times 10^{17} \text{ unità elettrostatiche/g.} \quad [66]$$

D'altra parte, studiando l'elettrolisi (vedi [48]), abbiamo visto che la quantità di elettricità necessaria per liberare un grammo di idrogeno è $C_0 = 2,90 \times 10^{14}$ unità elettrostatiche/g. Se, com'è facile presumere, riteniamo che la carica di una particella è la stessa in ciascun caso, cioè un elettrone, dobbiamo concludere che la massa m_{el} di una particella del raggio catodico deve essere legata alla massa di un atomo di idrogeno m_H dal seguente rapporto

$$\frac{m_{el}}{m_H} = \frac{e}{m_H} \cdot \frac{e}{m_{el}} = \frac{2,90 \times 10^{14}}{5,31 \times 10^{17}} = \frac{1}{1830}$$

Abbiamo così dimostrato che le particelle dei raggi catodici hanno una massa circa 2000 volte più piccola degli atomi di idrogeno, che sono gli atomi più leggeri esistenti in natura. Tale risultato ci suggerisce la conclusione che i raggi catodici sono un flusso di cariche elettriche elementari.

Questa idea ha superato la prova di numerose ricerche sperimentali. L'elettricità negativa consiste di elettroni liberi in moto, mentre l'elettricità positiva è legata alla materia e non può esistere senza di essa. La vecchia ipotesi della teoria a un fluido viene ad avere così una conferma e una formulazione precisa in base alle successive ricerche sperimentali. In seguito si riuscì anche a calcolare esattamente la carica e di un elettrone. Il primo esperimento di questo tipo eseguito da J. J. Thomson (1898), era basato sull'idea che piccole gocce d'olio o di acqua (oppure sferette di metallo di dimensioni microscopiche o submicroscopiche) prodotte per condensazione di

un vapore o per vaporizzazione di un liquido nell'aria, devono cadere con velocità costante, poiché la forza d'attrito dell'aria equilibra la forza peso. Da una misura del tempo di caduta si può risalire al raggio delle particelle e calcolarne quindi la massa M , moltiplicando il volume per la densità. Il peso di una particella è allora Mg , dove $g = 981 \text{ cm/s}^2$ è l'accelerazione di gravità. Se ora sottoponiamo l'aria all'azione dei raggi X o della radiazione emessa da una sostanza radioattiva, queste particelle si caricheranno elettricamente, e per effetto di un campo elettrico E diretto verticalmente verso l'alto, le sferette dotate di carica positiva e subiranno una spinta nella stessa direzione; facendo in modo che la forza eE sia uguale alla forza peso Mg , ogni gocciolina rimarrà sospesa nell'aria. La carica e potrà quindi essere calcolata dall'equazione $e \cdot E = M \cdot g$. Millikan (1910), che eseguì i più accurati esperimenti di questo tipo, trovò che la carica di ogni gocciolina è sempre un multiplo esatto di una carica più piccola. Tale carica, che chiameremo *quanto di elettricità elementare*, vale

$$e = 4,77 \times 10^{-10} \text{ unità elettrostatiche.} \quad [67]$$

La conoscenza del valore numerico della carica elementare non ha però un ruolo essenziale nella teoria dell'elettrone di Lorentz. Ci occuperemo adesso dell'ipotesi di questa teoria sulla costituzione della materia.

Gli atomi, ai quali sono indissolubilmente legate le cariche elettriche positive, contengono inoltre un ugual numero di elettroni negativi, in modo da risultare elettricamente neutri. Nei materiali isolanti gli elettroni sono strettamente legati agli atomi e possono compiere solo piccole oscillazioni attorno alla loro posizione di equilibrio; in tal modo l'atomo diventa un dipolo. Negli elettroliti e nei gas conduttori può capitare che a un atomo manchino, o che abbia in sovrannumero, alcuni elettroni; l'atomo è allora uno *ione*, e trasporta simultaneamente in un campo elettrico materia ed elettricità. Nei metalli gli elettroni si muovono abbastanza liberamente e l'unica resistenza che incontrano è dovuta alle collisioni con gli atomi della

sostanza. Possiamo ritenere in un certo senso che le proprietà magnetiche siano una conseguenza del fatto che gli elettroni descrivono in determinati atomi delle orbite chiuse, del tutto equivalenti alle correnti molecolari di Ampère.

Elettroni e cariche atomiche positive fluttuano nell'etere e, secondo le equazioni di Maxwell, generano un campo elettromagnetico. Posto quindi $\varepsilon=1$, $\mu=1$ e sostituita alla densità di corrente di conduzione la corrente di trascinamento degli elettroni $\varrho \cdot v$, le equazioni diventano

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 4\pi\varrho & \operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{E}{\tau} &= 4\pi\varrho \frac{v}{c} \\ \operatorname{div} H &= 0 & \operatorname{rot} E + \frac{1}{\tau} \frac{H}{\tau} &= 0. \end{aligned} \quad [68]$$

In esse sono contenute nel solito modo le leggi di Coulomb, di Biot e Savart e di Faraday.

Così ogni fenomeno elettromagnetico è dovuto fondamentalmente ai moti degli elettroni e dei campi ad essi connessi. La materia nel suo insieme è un fenomeno elettrico, e le sue differenti proprietà dipendono dai possibili moti degli elettroni rispetto agli atomi, nel modo che abbiamo descritto. Il problema della teoria degli elettroni è quello di ottenere dalle equazioni fondamentali [68] relative a un singolo invisibile elettrone o atomo, le ordinarie equazioni di Maxwell; si tratta di dimostrare cioè che i corpi materiali posseggono, a seconda della loro natura, una conducibilità σ , una costante dielettrica ε e una permeabilità μ .

Lorentz diede una soluzione a questo problema e fece vedere che dalla teoria degli elettroni è possibile ottenere le leggi di Maxwell come caso particolare ma soprattutto chiarire numerose circostanze che non si potevano spiegare se non con l'aiuto di ipotesi artificiali. Si tratta cioè dei fenomeni ottici più complessi, quali la dispersione, la rotazione del piano di polarizzazione per effetto di un campo magnetico (p. 224) scoperta da Faraday, e in generale fenomeni analoghi in cui intervengono interazioni fra onde luminose e campi

elettrici o magnetici. Noi non ci occuperemo dettagliatamente di questa teoria, che è piuttosto vasta e complicata da un punto di vista matematico, ma ci limiteremo al problema più importante per il nostro studio: che parte ha l'etere in questa concezione della materia?

Lorentz enunciò una tesi estremamente radicale, mai prima asserita con altrettanta chiarezza: *l'etere è a riposo nello spazio assoluto.*

In linea di principio ciò significa far coincidere l'etere con lo spazio assoluto. Lo spazio assoluto non è il vuoto, ma un ente dotato di proprietà ben definite, il cui stato è descritto mediante due grandezze misurabili, il campo elettrico E e il campo magnetico H .

Questa ipotesi rappresentò un ulteriore passo avanti rispetto alla teoria di Fresnel, in cui l'etere dello spazio astronomico era a riposo in un appropriato sistema inerziale, mentre l'etere interno ai corpi materiali era parzialmente trascinato da essi.

Lorentz rinunciò all'idea di un trascinamento parziale e arrivò praticamente allo stesso risultato. Per vedere come questo avvenga consideriamo il fenomeno che si verifica in un dielettrico posto fra le armature di un condensatore carico. Come abbiamo già visto (pp. 238-40) il campo elettrico perpendicolare alle armature (fig. 89) che così si genera, orienta gli elettroni presenti negli atomi della sostanza isolante e trasforma questi ultimi in dipoli. Seguendo la teoria di Maxwell l'induzione dielettrica è $\varepsilon \cdot E$, ma solo una parte è dovuta agli elettroni. Poiché la costante dielettrica del vuoto è $\varepsilon=1$ e quindi l'induzione vale E , il valore effettivo dell'induzione dovuta agli elettroni è $\varepsilon E - E = (\varepsilon - 1)E$. Abbiamo visto d'altra parte che gli esperimenti di Röntgen e Wilson con isolanti in movimento, dimostrano che in realtà è solo questa parte dell'induzione che partecipa al moto. Così la teoria di Lorentz interpreta correttamente i fenomeni elettromagnetici senza ricorrere a ipotesi sul trasporto dell'etere da parte della materia.

Il seguente argomento servirà ora a spiegare come si possa ottenere una formula per il trascinamento della luce in pieno accordo con la formula di Fresnel [44]: come nell'esperimento di Wilson,

consideriamo un dielettrico in moto nella direzione x con velocità v e supponiamo che nel suo interno si propaghi, nella medesima direzione, un raggio luminoso (fig. 105). Tale raggio consiste di una vibrazione elettrica E , parallela all'asse y , e una vibrazione magnetica,

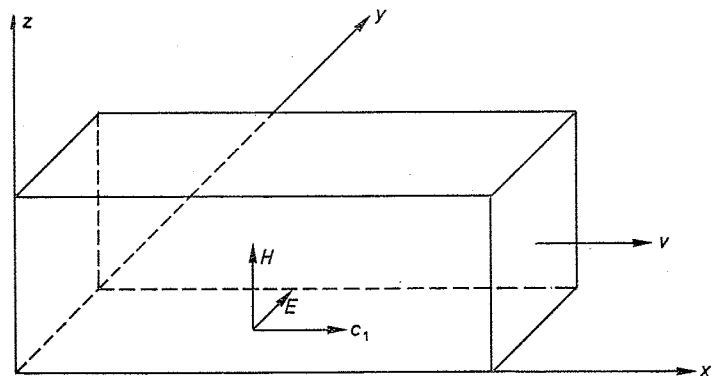


Fig. 105. Un raggio luminoso con vibrazione elettrica E e vibrazione magnetica H viaggia in un dielettrico con velocità c_1 . Il dielettrico si muove con velocità v .

parallela all'asse z . Come sappiamo dall'esperienza di Wilson, questo campo magnetico genera nel corpo in movimento un'induzione di modulo $(\epsilon - 1)(v/c)H$ e direzione y ; dividendo per ϵ questo valore, si ottiene un campo elettrico sovrapposto a E , per cui il campo elettrico totale risulta

$$E + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{v}{c} H.$$

Se l'etere fosse completamente trascinato dalla materia, come nella teoria di Hertz, in luogo di $\epsilon - 1$ avremmo soltanto ϵ e quindi il campo totale sarebbe $E + (v/c)H$. Osservando che nella formula precedente v è sostituito da $((\epsilon - 1)/\epsilon)v$, possiamo concludere che questo valore corrisponde alla velocità assoluta dell'etere rispetto alla materia secondo la teoria di Fresnel, cioè al coefficiente di tra-

scinamento ϕ dell'ottica (vedi formula [44]). Infatti, poiché secondo la teoria elettromagnetica di Maxwell la costante dielettrica è uguale al quadrato dell'indice di rifrazione n , cioè $\epsilon = n^2$, possiamo scrivere

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} v = \frac{n^2 - 1}{n^2} v = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v = \phi$$

che coincide con la [44].

La teoria di Fresnel incontrava delle difficoltà nell'interpretazione del fenomeno della dispersione: è chiaro infatti che, poiché n dipende dalla frequenza λ (colore) della luce, anche il coefficiente di trascinamento ϕ deve essere funzione di λ , mentre è logico ritenere che l'etere sia trascinato in un unico modo, non in modo differente secondo il colore. Nella teoria degli elettroni questa difficoltà scompare, poiché l'etere è fermo e sono gli elettroni esistenti nella materia a essere trascinati: la dispersione è dovuta al moto di vibrazione che la luce impone agli elettroni e alla reazione che a loro volta esercitano sulla velocità della luce stessa.

Non possiamo addentrarci nello sviluppo di questa teoria e delle sue molteplici ramificazioni, per cui ci limiteremo a riassumerne i risultati. La teoria di Lorentz prevede l'esistenza di un etere assolutamente a riposo; essa dimostra tuttavia che ogni fenomeno di natura elettromagnetica e ottica dipende soltanto dai moti di traslazione relativi dei corpi, almeno limitatamente alle quantità del primo ordine in β . Essa è in grado quindi di interpretare tutti i fenomeni conosciuti, e soprattutto l'impossibilità di mettere in evidenza un moto assoluto della terra rispetto all'etere mediante esperimenti che coinvolgono soltanto quantità del primo ordine (relatività ottica, o meglio, relatività elettromagnetica).

Vi è tuttavia un esperimento del primo ordine che non potrebbe essere spiegato dalla teoria di Lorentz meglio di qualsiasi altra teoria precedentemente discussa, e cioè un esperimento che dimostrasse l'impossibilità di rivelare il moto assoluto dell'intero sistema solare, basandosi sul metodo di Römer (vedi pp. 120 e 162).

Di fondamentale importanza per la teoria di Lorentz è quindi

l'accordo con esperimenti che consentano di misurare quantità del secondo ordine in β , e quindi di mettere in evidenza un moto assoluto della terra attraverso l'etere. Prima di discutere questo problema, vogliamo però occuparci di un risultato della teoria degli elettroni di Lorentz che ne aumentò grandemente la portata: l'interpretazione elettrodinamica dell'inerzia.

13. La massa elettromagnetica

Il lettore avrà notato che, messo da parte l'etere elastico e rivolta la nostra attenzione all'etere elettrodinamico, non abbiamo più avuto occasione di parlare di meccanica; i fenomeni meccanici ed elettrodinamici sono rimasti completamente separati fra loro. I primi si svolgono nello spazio newtoniano assoluto, che è definito mediante la legge d'inerzia e si manifesta attraverso le forze centrifughe; gli altri sono stati dell'etere a riposo nello spazio assoluto. Una teoria di carattere generale come vuol essere appunto la teoria di Lorentz, non può però accettare che fra queste due specie di fenomeni non esistano stretti collegamenti.

Abbiamo visto che i fisici, nonostante incredibili sforzi e una buona dose di ingegnosità non riuscirono a dare un'interpretazione meccanicistica dell'elettrodinamica. Viene quindi spontaneo suggerire allora l'atteggiamento opposto: è possibile interpretare la meccanica in termini di elettrodinamica?

Se questo fosse possibile lo spazio newtoniano assoluto si trasformerebbe nell'etere materiale, e le forze d'inerzia e centrifughe apparirebbero come azioni fisiche dell'etere, per esempio come campi elettromagnetici di tipo particolare. In tal caso però il principio di relatività della meccanica perderebbe la sua generalità e sarebbe valido, come nell'elettrodinamica, solo approssimativamente, cioè per quantità del prim'ordine in $\beta=v/c$.

Gli scienziati non esitarono a compiere questo passo, che pure modificava sostanzialmente la posizione assegnata ai diversi concetti della fisica e, per quanto la teoria dell'etere a riposo fosse successiva-

mente abbandonata, questa rivoluzione che spodestava la meccanica dal suo trono e portava l'elettrodinamica ad una posizione di preminenza nella fisica, non fu inutile: i risultati raggiunti mantennero una validità, anche se in una forma abbastanza differente.

Abbiamo già visto (p. 225) che la propagazione delle onde elettromagnetiche avviene per l'azione reciproca dei campi elettrico e magnetico, secondo un processo analogo a quello dovuto all'inerzia meccanica. Un campo elettromagnetico ha una capacità di persistenza nel tempo abbastanza simile a quella della materia, ed è generato a spese di un certo lavoro, che è possibile riottenere quando il campo è distrutto. Ciò è quanto si osserva in tutti i fenomeni connessi con vibrazioni elettromagnetiche; per esempio nei vari tipi di radiotrasmittitori. Un vecchio trasmettitore di Marconi, contiene un oscillatore elettrico formato essenzialmente (fig. 106) di un generatore di scintilla F , un'induttanza S e un condensatore K (due armature metalliche separate fra loro), connessi da un filo elettrico in

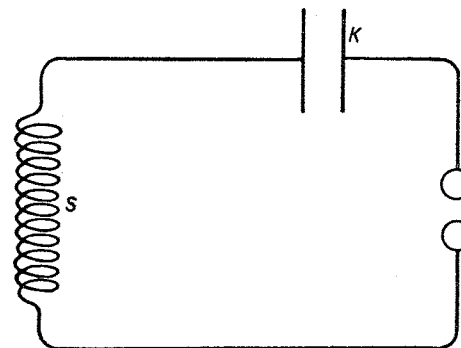


Fig. 106. Un circuito con un condensatore K , un'induttanza S ed un generatore di scintilla F usato per osservare oscillazioni elettriche.

modo da formare un circuito "aperto". Il condensatore viene caricato finché non scocca una scintilla fra i capi di F ; ciò da luogo a una scarica nel condensatore e a un flusso delle cariche elettriche

precedentemente accumulate. Queste non soltanto si neutralizzano fra loro, ma passano rapidamente oltre lo stato di equilibrio, per accumularsi nuovamente, ma con polarità invertite, sulle armature del condensatore; esattamente come un pendolo oscilla a sinistra e a destra della posizione di equilibrio. In questo modo il condensatore viene ricaricato e si ha un nuovo passaggio di elettricità, in senso opposto al precedente, che produce un'altra scintilla in F ; il sistema è quindi sede di oscillazioni che permangono finché la sua energia non si trasformi in calore per riscaldamento del filo conduttore o non venga utilizzata in altre parti dell'apparecchio, per esempio in un'antenna. Le oscillazioni elettriche dimostrano così una proprietà d'inerzia del campo, che corrisponde esattamente all'inerzia della massa del pendolo. La teoria di Maxwell spiega correttamente e in ogni particolare questo fenomeno, e le vibrazioni elettromagnetiche generate nel circuito possono essere calcolate dalle equazioni di campo.

Sulla base di questo fatto J. J. Thomson suppose che l'inerzia di un corpo carico elettricamente dovesse aumentare. Consideriamo una sfera carica inizialmente a riposo e quindi in moto con velocità v . Il campo elettrostatico circostante la sfera ferma ha linee di forza dirette radialmente verso l'esterno (fig. 107), e ad esso si aggiunge, nel caso della sfera in movimento, un campo magnetico le cui linee di forza circondano il percorso della sfera (fig. 108). Ricordiamo infatti che una carica in movimento corrisponde a una corrente di trascinamento (combinata con una corrente di spostamento) e genera, secondo la legge di Biot e Savart, un campo magnetico. Questi due stati posseggono le proprietà d'inerzia precedentemente descritte, e possono essere trasformati l'uno nell'altro soltanto a spese di un certo lavoro. La forza necessaria per mettere in movimento una sfera inizialmente a riposo è quindi maggiore per una sfera carica che non per una sfera scarica; analogamente, per accelerare una sfera carica già in movimento, è necessario un incremento della forza, poiché deve aumentare l'intensità del campo magnetico H .

Ricordiamo che una forza F che agisce per un piccolo intervallo di tempo τ , rappresenta un impulso $J = F\tau$; esso produce una varia-

zione di velocità w in una massa m , secondo la [7] di pagina 51

$$mw = J.$$

Se la massa è carica, un ben determinato impulso J produrrà una

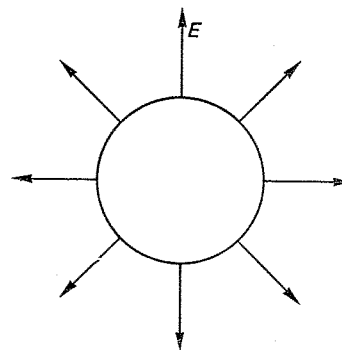


Fig. 107. Il campo elettrico generato da una carica ferma.

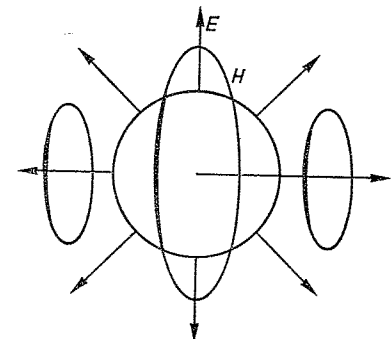


Fig. 108. Nel caso di una carica in movimento, al campo elettrico circostante si sovrappone un campo magnetico.

variazione di velocità più piccola e la differenza J' servirà per la variazione del campo magnetico. Avremo così

$$mw = J - J'.$$

Ora, il calcolo ci dice che l'impulso J' necessario per aumentare il campo magnetico è più grande quando l'accelerazione w è maggiore, e che, inoltre, esso è approssimativamente proporzionale a questa variazione di velocità. Possiamo quindi scrivere $J' = m'w$, dove m' è un fattore di proporzionalità, che può dipendere dallo stato in cui si trova m prima che si verifichi la variazione di velocità, cioè da v . Si ottiene quindi

$$mw = J - m'w$$

oppure

$$(m + m')w = J.$$

Tutto procede quindi come se la massa m fosse incrementata di una quantità m' , che deve essere calcolata dalle equazioni del campo elettromagnetico e che può dipendere dalla velocità v . Un valore esatto di m' , valido per qualsiasi valore di v , può essere calcolato solo in base a precise ipotesi sulla distribuzione della carica elettrica nel corpo in movimento. Ma anche senza ricorrere a queste ipotesi, è possibile ottenere un valore limite di m' , valido per velocità piccole rispetto alla velocità della luce c , cioè per piccoli valori di β :

$$m' = \frac{4}{3} \frac{S}{c^2}, \quad [69]$$

dove S è l'energia elettrostatica del corpo carico.

Abbiamo visto che la massa di un elettrone è circa 2000 volte più piccola di quella dell'atomo d'idrogeno; sorge spontanea quindi l'idea che l'elettrone non abbia una massa "ordinaria", ma che essa non sia altro che un "atomo di elettricità", la cui origine sia esclusivamente elettromagnetica. È possibile conciliare tale ipotesi con ciò che sappiamo sul raggio, la carica e la massa dell'elettrone?

Dal momento che gli elettroni devono essere elementi costitutivi degli atomi, è chiaro che le loro dimensioni saranno certamente più piccole di quelle atomiche. Il raggio di un elettrone deve essere cioè minore di 10^{-8} cm, che è l'ordine di grandezza, noto dalla fisica atomica, del raggio di un atomo. Se immaginiamo l'elettrone come una sfera di raggio r e carica e distribuita sulla sua superficie, la sua energia elettrostatica, calcolata mediante le legge di Coulomb sarà $S = \frac{1}{2}(e^2/r)$. Dalla [69] ricaviamo quindi per la massa elettromagnetica

$$m_{el} = \frac{4}{3} \frac{S}{c^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{rc^2}$$

e per il raggio

$$r = \frac{2}{3} \frac{e}{c^2 m_{el}}.$$

Tutte le quantità al secondo membro di questa uguaglianza sono note: e/m_{el} dalla deviazione dei raggi catodici [66], e dalle misure di Millikan [67], e c è la velocità della luce. Sostituendo questi valori si ottiene

$$r = 1,88 \times 10^{-13} \text{ cm},$$

che è circa 10^5 volte più piccolo del raggio di un atomo.

L'ipotesi che la massa dell'elettrone sia di origine elettromagnetica non è quindi in contrasto con alcun fatto noto; questo però non è sufficiente a dimostrarne la validità.

A questo stadio del suo sviluppo, la teoria trovò un valido sostegno nei risultati ottenuti con raffinati esperimenti sui raggi catodici e sui raggi β delle sostanze radioattive, costituiti anch'essi di elettroni. Abbiamo già spiegato come sia possibile mediante l'azione di campi elettrici e magnetici determinare il rapporto fra carica e massa e/m_{el} e la velocità v di questi raggi, e abbiamo ottenuto appunto un valore di e/m_{el} indipendente dalla velocità. Si trovò però che per velocità più elevate il valore di e/m_{el} diminuiva; questo effetto era particolarmente evidente e facile da misurare nel caso della radiazione β del radio, che ha una velocità molto prossima a quella della luce. D'altra parte l'ipotesi di una dipendenza della carica elettrica dalla velocità era incompatibile con le idee della teoria degli elettroni, mentre era certamente prevedibile che la massa dipendesse dalla velocità, una volta ammessa la sua origine elettromagnetica. Per arrivare a una teoria quantitativa, furono necessarie però ipotesi ben precise concernenti la forma dell'elettrone e la distribuzione di carica sulla sua superficie. M. Abraham (1903) considerò l'elettrone come una sfera rigida e studiò i due casi di una distribuzione di carica uniforme all'interno della sfera, e di una distribuzione sulla superficie della sfera stessa, dimostrando che ambedue le ipotesi portavano allo stesso tipo di dipendenza della massa dalla velocità, cioè a un aumento della massa proporzionale alla velocità. Quanto maggiore è la velocità dell'elettrone, tanto più il campo elettromagnetico si oppone a un ulteriore aumento della velocità. L'aumento di m_{el} spiega l'osser-

vata diminuzione di e/m_{el} , e la teoria di Abraham si accorda quantitativamente molto bene con i risultati delle misure di Kaufmann (1901), nell'ipotesi che l'elettrone non abbia una massa "ordinaria".

In questo modo si raggiunse lo scopo di far risalire l'inerzia degli elettroni ai campi elettromagnetici nell'etere, ma nello stesso tempo si aprì un'ulteriore prospettiva. Si pensò infatti che anche la massa degli atomi potesse avere un'origine elettromagnetica, dal momento che in essi sono contenute cariche positive e numerosi elettroni. In tal caso la massa perderebbe il carattere di grandezza fondamentale che ha nella meccanica elementare, come misura dell'inerzia di un corpo, per diventare una conseguenza secondaria della struttura dell'etere. Lo spazio newtoniano assoluto, definito soltanto attraverso la legge d'inerzia, diventerebbe quindi un concetto superfluo e andrebbe quindi sostituito dall'etere, di cui sono ben note le proprietà elettromagnetiche.

Vedremo più avanti (p. 264) come questo punto di vista sia contraddetto da nuovi fatti sperimentali. Ciò nonostante le relazioni fra massa ed energia elettromagnetica scoperte in questo modo costituirono una scoperta fondamentale, il cui profondo significato venne alla luce soltanto quando Einstein propose la sua teoria della relatività.

Dobbiamo aggiungere inoltre che, insieme alla teoria dell'elettrone come sfera rigida di Abraham, altre ipotesi furono proposte e sviluppate matematicamente; di queste la più importante è quella di Lorentz (1904) che ha stretti legami con la teoria della relatività. Lorentz suggerì che un elettrone in movimento subisse una contrazione nella direzione del moto, in modo da trasformarsi da una sfera in uno sferoide di rivoluzione appiattito; la misura di questo appiattimento doveva dipendere in modo ben preciso dalla velocità. Questa ipotesi può sembrare a prima vista piuttosto strana, né basta a renderla plausibile il fatto che essa preveda una dipendenza tra massa elettromagnetica e velocità più semplice di quella ottenuta in base alla teoria di Abraham. Essa trovò una conferma, nella direzione aperta dalla teoria degli elettroni di Lorentz, nel momento in cui

l'analisi di nuovi risultati sperimentali (di cui ci occuperemo fra un istante) rivelò la necessità di considerare quantità del secondo ordine. Solo in seguito però, nell'ambito della teoria della relatività, la formula di Lorentz acquistò il suo significato più generale. Ci occuperemo più avanti (p. 328) degli esperimenti che furono eseguiti per decidere fra questa e la teoria di Abraham.

Al principio del nuovo secolo, dopo che la teoria degli elettroni ebbe raggiunto lo sviluppo che abbiamo descritto in precedenza, la possibilità di formulare una teoria che descrivesse in modo uniforme tutti i fenomeni fisici sembrò a portata di mano; si pensava cioè a un mondo in cui tutte le forme di energia, compresa l'inerzia meccanica, fossero riconducibili alla medesima radice: il campo elettromagnetico nell'etere. Rimaneva ancora estranea a questa descrizione sistematica soltanto un tipo d'energia, la gravità, ma si poteva sperare che anch'essa fosse interpretabile come un effetto dell'etere.

14. *L'esperimento di Michelson e Morley*

Vent'anni prima di questo periodo tuttavia, la base dell'intera teoria si era già incrinata, e mentre la costruzione continuava a svilupparsi, le fondamenta avevano bisogno di riparazioni e di rinforzi.

Abbiamo già messo in evidenza più volte che un esperimento conclusivo nei confronti della teoria dell'etere stazionario, doveva essere sufficientemente preciso da consentire una valutazione di quantità del secondo ordine in β . Solo in questo modo sarebbe stato possibile dimostrare se, com'è richiesto dalla teoria, un corpo in moto attraverso l'etere con grande velocità sia o no investito da un vento d'etere che trascina con sé le onde luminose.

Michelson e Morley (1881) furono i primi a eseguire con successo il più importante esperimento di questo tipo; essi si servirono dell'interferometro di Michelson (p. 132), perfezionato a tal punto da costituire uno strumento di precisione di un'efficienza mai prima raggiunta.

Studiando l'influenza che il moto della terra ha sulla velocità

della luce (p. 163), abbiamo trovato che il tempo impiegato da un raggio luminoso per percorrere nei due sensi una distanza l parallela alla direzione del moto terrestre differisce, dal valore che si avrebbe se la terra fosse ferma, soltanto per quantità del secondo ordine. Il valore trovato era

$$t_1 = l \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) = \frac{2lc}{c^2 - v^2},$$

che possiamo anche scrivere come

$$t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

È chiaro quindi che un modo per provare l'inesistenza del vento d'etere, consiste nel calcolare questo tempo con tale precisione che il rapporto $1/(1 - \beta^2)$ possa essere considerato diverso da 1, malgrado il piccolissimo valore di β^2 .

D'altra parte non è assolutamente possibile misurare il brevissimo intervallo di tempo nel quale la luce compie un certo percorso; con i metodi interferometrici, invece, si misurano differenze tra i tempi impiegati dalla luce per compiere una stessa distanza secondo cammini differenti, raggiungendo in tal modo una precisione veramente sorprendente.

Per questa ragione Michelson e Morley fecero in modo che un secondo raggio luminoso percorresse nei due sensi la distanza AB (sempre di lunghezza l), ma in direzione perpendicolare all'orbita terrestre (fig. 109). Mentre la luce viaggia da A a B , la terra si sposta di un piccolo tratto nella direzione del suo moto e quindi il punto B viene a coincidere con il punto B' dell'etere. È chiaro allora che il percorso effettivamente compiuto dalla luce nell'etere sarà AB' e, se t è il tempo impiegato, $AB' = ct$. Nello stesso tempo A si è spostato in A' con velocità v , cosicché $AA' = vt$. Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $AA'B$, possiamo scrivere

$$c^2 t^2 = l^2 + v^2 t^2$$

cioè

$$t^2(c^2 - v^2) = l^2, \quad t^2 = \frac{l^2}{c^2 - v^2} = \frac{l^2}{c^2} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad t = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Per compiere il percorso di ritorno la luce impiega esattamente lo stesso tempo, dato che la terra si sposta di un intervallo identico al precedente e il punto A va da A' ad A'' .

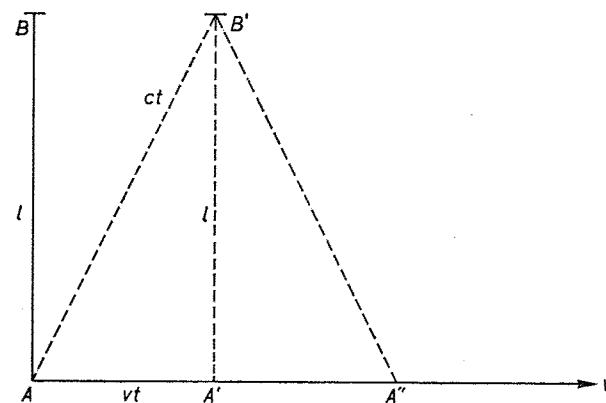


Fig. 109. Il percorso della luce nell'esperimento di Michelson.

Il tempo totale impiegato dalla luce per un percorso nei due sensi è quindi:

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

La differenza fra i tempi necessari a coprire la stessa distanza in direzione parallela e perpendicolare al moto terrestre è allora

$$t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Se trascuriamo i termini di ordine superiore a β^2 (come abbiamo già

fatto a p. 159) possiamo approssimare $1/(1-\beta^2)$ con $1+\beta^2$ e $1/\sqrt{1-\beta^2}$ con $1+\beta^2/2$,* e quindi scrivere con sufficiente approssimazione che:

$$t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left[(1+\beta^2) - \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right] = \frac{2l}{c} \frac{\beta^2}{2} = \frac{l}{c} \beta^2.$$

Il ritardo fra i due raggi luminosi è così una quantità del secondo ordine in β .

Questo ritardo si può misurare con l'aiuto dell'interferometro di Michelson (fig. 110). La luce proveniente dalla sorgente Q è divisa dalla lamina semiargentata P in due raggi che si propagano in direzioni perpendicolari agli specchi S_1 e S_2 ; qui essi vengono riflessi e inviati di nuovo sulla lamina. Da P in poi i due raggi viaggiano parallelamente fino al cannocchiale F dove infine interferiscono. Per trovarsi nelle medesime condizioni del caso ora discusso, basta che le distanze S_1P e S_2P siano uguali e che un braccio dello strumento sia disposto parallelamente alla direzione del moto terrestre. In tal caso i due raggi raggiungeranno il campo visivo con una differenza di tempo pari a $(l/c)\beta^2$, e le frange d'interferenza non saranno quindi situate nella posizione in cui dovrebbero trovarsi se la terra fosse ferma. Se ora ruotiamo di 90 gradi lo strumento, in modo che l'altro braccio sia parallelo alla direzione del moto terrestre, le frange d'interferenza subiranno un identico spostamento, ma in direzione opposta. Osservando allora la posizione delle frange dopo aver ruotato l'interferometro, dovremmo misurare uno spostamento corrispondente a un ritardo pari a $2(l/c)\beta^2$.

Il rapporto fra questo ritardo e il periodo di vibrazione T della luce usata sarà $(2l/cT)\beta^2 = (2l/\lambda)\beta^2$, poiché per la [35] $\lambda = cT$.

In conclusione, dopo una rotazione di 90 gradi dell'intero dispositivo, il rapporto fra lo spostamento relativo dei due treni d'onda che interferiscono, e la lunghezza d'onda della luce sarà $(2l\beta^2/\lambda)$

* Per dimostrare la validità approssimata della relazione $1/(1-\beta^2) = 1+\beta^2$ poniamo $1 = (1-\beta^2)(1+\beta^2) = 1-\beta^4$, che è esatta se si trascura β^4 . Analogamente, elevando al quadrato $1/\sqrt{1-\beta^2} = 1+\beta^2/2$ si ottiene $1/(1-\beta^2) = 1 + \beta^2 + \beta^4/2$ che, trascurando il termine in β^4 , è ancora la formula precedente.

(fig. 111). Il fenomeno d'interferenza è dovuto al fatto che i raggi emessi dalla sorgente in direzioni diverse percorrono cammini ottici un po' differenti: poiché la distanza fra due frange corrisponde a una differenza di cammino pari a una lunghezza d'onda, lo spostamento delle frange che si dovrebbe osservare è la frazione $2l\beta^2/\lambda$ della larghezza della frangia stessa.

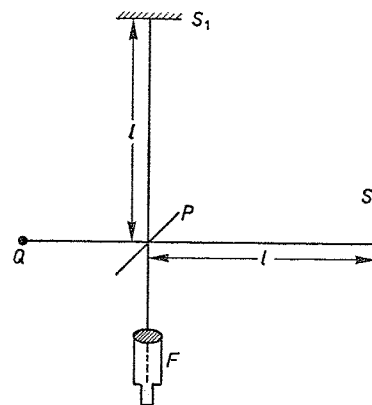


Fig. 110. Interferometro di Michelson.

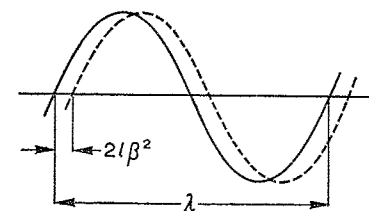


Fig. 111. Due onde di uguale lunghezza d'onda λ , che viaggiano sfasate di $2l\beta^2$.

Michelson, ripetendo il suo esperimento insieme a Morley nel 1887, riuscì a estendere la lunghezza del percorso compiuto dalla luce fino a $11 \text{ m} = 1,1 \times 10^3 \text{ cm}$, facendo subire ai raggi parecchie riflessioni avanti e indietro. La lunghezza d'onda della luce usata era circa $\lambda = 5,9 \times 10^{-5} \text{ cm}$; poiché β vale approssimativamente 10^{-4} e quindi $\beta^2 = 10^{-8}$, si ottiene

$$\frac{2l\beta^2}{\lambda} = \frac{2 \times 1,1 \times 10^3 \times 10^{-8}}{5,9 \times 10^{-5}} = 0,37.$$

Questo significa che ruotando l'interferometro di 90 gradi, le frange di interferenza dovevano essere separate per più di un terzo della

loro distanza, e d'altra parte Michelson era certo di poter misurare uno spostamento anche cento volte più piccolo di questo.

Ma l'esperimento non mise in luce alcun effetto di questo tipo, e tale risultato fu confermato in seguito da misurazioni più accurate. La conclusione che dobbiamo trarre è quindi che il vento d'etere non esiste. *La velocità della luce non subisce alcuna influenza da parte del moto terrestre, nemmeno per ciò che riguarda quantità del secondo ordine.*

15. L'ipotesi della contrazione

La conclusione che Michelson e Morley trassero dal loro esperimento fu che l'etere doveva essere completamente trascinato dal moto della terra, in accordo con la teoria elastica di Stokes e la teoria elettromagnetica di Hertz. Tale conclusione però era contraddetta dai numerosi fatti sperimentali che provavano l'esistenza di un trascinamento parziale. Michelson cercò allora di vedere se era possibile stabilire una variazione della velocità della luce in funzione dell'altezza sul livello del mare. Ma non ottenne alcun risultato, per cui concluse che il moto dell'etere trascinato dalla terra dovesse estendersi fino ad altezze molto elevate sulla superficie terrestre. In tal caso l'etere dovrebbe essere influenzato dal moto di un corpo anche a distanze considerevoli. Ma questa ipotesi cadde quando Oliver Lodge dimostrò (1892) che la velocità della luce in prossimità di un corpo in moto con grande velocità non subisce alcuna variazione, nemmeno nel caso in cui la luce attraversi un elevato campo elettrico o magnetico trascinato dal corpo. Questi tentativi d'altra parte erano praticamente inutili, poiché se riuscivano a dare una spiegazione ineccepibile dell'esperimento di Michelson, erano tuttavia in contrasto con quei fenomeni dell'elettrodinamica e dell'ottica dei corpi in movimento che confermavano l'ipotesi di un trascinamento parziale.

Va osservato inoltre che l'esperimento di Michelson e Morley poneva in una situazione molto difficile la teoria degli elettroni di Lorentz. L'idea di un etere stazionario richiedeva infatti l'esistenza

sulla terra di un vento d'etere, ed era quindi contraddetta dai risultati sperimentali. Il fatto che, malgrado queste contraddizioni, la teoria abbia potuto resistere, è una prova della sua intrinseca solidità, dovuta a una descrizione coerente e completa della realtà fisica. Infine essa riuscì a superare in una certa misura anche questa difficoltà, grazie a un'ipotesi piuttosto singolare proposta da Fitzgerald (1892) e in seguito ripresa e applicata da Lorentz.

Riprendiamo in considerazione le basi teoriche dell'esperimento di Michelson e Morley; abbiamo visto che il tempo impiegato dalla luce per percorrere nei due sensi una distanza l deve assumere valori diversi secondo che il raggio si propaghi parallelamente o perpendicolarmente al moto della terra. Nel primo caso si ha

$$t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \beta^2},$$

nel secondo

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Se ora supponiamo che il braccio dell'interferometro parallelo alla direzione del moto terrestre si contragga nel rapporto $\sqrt{1 - \beta^2}:1$, il tempo t_1 si dovrà ridurre nello stesso rapporto e cioè

$$t_1 = \frac{2l\sqrt{1 - \beta^2}}{c(1 - \beta^2)} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Avremo in tal modo $t_1 = t_2$.

Ciò suggerisce la seguente ipotesi generale, di cui non può certo sfuggire il carattere di singolarità e di estrema audacia: *ogni corpo in moto con velocità v rispetto all'etere si contrae lungo la direzione del moto secondo il fattore*

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

In base a questa ipotesi si comprende allora la ragione per cui

l'esperimento di Michelson e Morley conduce ad un risultato negativo, dato che per ambedue le posizioni dell'interferometro t_1 deve essere uguale a t_2 . Inoltre, ed è il punto più importante, tale contrazione non può essere in alcun modo misurata sulla terra, perché qualsiasi strumento subirebbe un'analoga contrazione; soltanto un osservatore a riposo nell'etere esterno alla terra potrebbe osservarla. A tale osservatore la terra, e ogni cosa su di essa, dovrebbe apparire appiattita nella direzione del moto.

L'aspetto più notevole di questa ipotesi, e in un certo senso il meno comprensibile, consiste nell'interpretare la contrazione non come il risultato di un certo tipo di forza, ma soltanto come una conseguenza accidentale del moto. Questa obiezione tuttavia non impedì a Lorentz di inserire tale ipotesi nella sua teoria, specie nel momento in cui *nuovi* esperimenti confermavano l'impossibilità di misurare un effetto del secondo ordine dovuto al moto della terra attraverso l'etere.

Non ci è possibile dare una descrizione sia pure schematica di tutti gli esperimenti di questo tipo. Ricordiamo soltanto che si trattava in parte di esperimenti di ottica legati ai fenomeni di rifrazione e riflessione, birifrangenza, rotazione del piano di polarizzazione ecc.; in parte, di esperimenti sull'elettromagnetismo concernenti fenomeni di induzione, di distribuzione di correnti nei conduttori e altri analoghi. Il perfezionamento degli strumenti ci permette attualmente di stabilire senza possibilità di dubbio la presenza o l'assenza di effetti del secondo ordine in tali fenomeni. Un esperimento particolarmente interessante fu eseguito da Trouton e Noble (1903) nel tentativo di rivelare la forza di torsione che il vento d'etere dovrebbe esercitare su di un condensatore piano sospeso.

Tutti questi esperimenti diedero risultati negativi, nel senso che dimostrarono senz'ombra di dubbio che nessun moto di traslazione attraverso l'etere può essere messo in evidenza da un osservatore che prenda parte al moto. Il principio di relatività, già dimostrato in meccanica, è quindi valido anche per tutti i fenomeni elettromagnetici.

In seguito Lorentz cercò d'inserire questi fatti nella sua teoria

dell'etere, e ritenne che a questo scopo non avesse altra via che accettare l'ipotesi della contrazione e fonderla con le leggi della teoria dell'elettrone, in modo da costruire un'unica teoria priva di contraddizioni interne. Egli osservò innanzitutto che un sistema di cariche elettriche in equilibrio sotto l'azione reciproca delle sole forze elettrostatiche si contrae non appena viene messo in movimento; più precisamente, le forze elettromagnetiche che si generano non appena il sistema inizia a muoversi, modificano la configurazione di equilibrio in modo tale che ogni lunghezza si riduca di un fattore $\sqrt{1-\beta^2}$ nella direzione del moto.

Se ora ammettiamo che tutte le forze abbiano fondamentalmente un'origine elettrica o almeno che nei sistemi in moto uniforme esse seguano le stesse leggi d'equilibrio, questo teorema matematico rappresenta una spiegazione della contrazione di Fitzgerald. Ma l'ipotesi che tutte le forze siano di origine elettrica è difficile da sostenere, poiché, secondo vecchi e ben noti teoremi di Gauss e di Green, tali forze non darebbero mai luogo a una configurazione di equilibrio *stabile*. Le forze che legano fra loro gli atomi nelle molecole e queste nei solidi non possono essere quindi semplici forze elettriche. D'altra parte la necessità di introdurre forze di tipo diverso risulta ancora più evidente se si cerca di capire come sia costituito da un punto di vista dinamico un singolo elettrone. Si tratta come abbiamo visto (p. 254) di una distribuzione di carica negativa in uno spazio necessariamente finito, dal momento che l'energia di una sfera carica di raggio r $\frac{1}{2}(e^2/r)$ tenderebbe a infinito al tendere di r a zero. Di conseguenza, poiché le parti di cui è costituito un elettrone tenderebbero a separarsi a causa delle forze di repulsione fra cariche di segno uguale, dobbiamo ritenere che esse siano legate fra loro da una nuova forza. Fra le tante ipotesi possibili a questo proposito, ricordiamo per esempio che nella sua teoria Abraham aveva immaginato l'elettrone come una sfera rigida, supponendo quindi che le forze non elettriche fossero così elevate da impedire qualunque deformazione.

Fu Lorentz a suggerire che anche l'elettrone dovesse subire una contrazione secondo il fattore $\sqrt{1-\beta^2}$. Abbiamo già visto (p. 256)

come egli riuscisse a esprimere la dipendenza della massa dell'elettrone dalla velocità secondo una formula molto più semplice di quella di Abraham; vogliamo ora ricordare che gli elettroni della sua teoria dovevano possedere, oltre all'energia elettromagnetica, anche un'energia di deformazione, di origine sconosciuta, di cui non vi è cenno nella teoria dell'elettrone rigido di Abraham.

Successivamente Lorentz cercò di vedere se l'ipotesi della contrazione fosse sufficiente a dedurre il principio di relatività. La conclusione cui arrivò dopo una serie di calcoli piuttosto elaborati fu negativa, ma gli consentì di trovare (1899) quali condizioni dovessero essere aggiunte per stabilire una completa equivalenza riguardo ai fenomeni elettromagnetici tra un sistema in movimento e l'etere a riposo. Il risultato cui pervenne è d'importanza almeno pari a quella dell'ipotesi della contrazione: *in un sistema in moto uniforme è necessario introdurre una nuova misura del tempo*. Egli chiamò questo tempo, il cui valore varia tra sistema e sistema, "tempo locale". L'ipotesi della contrazione può ora essere espressa più chiaramente in questi termini: una misura di lunghezza dà risultati differenti se eseguita in un sistema in movimento o nell'etere. Queste due ipotesi stabiliscono che lo spazio e il tempo debbono essere misurati in modo differente a seconda che il sistema sia in moto o a riposo. Lorentz ricavò le leggi di trasformazione per passare da quantità misurate in un sistema ad un altro e dimostrò che tali trasformazioni lasciano invariate le equazioni di campo della teoria dell'elettrone. Questo è il contenuto matematico della sua scoperta. Quasi contemporaneamente Larmor (1900) e Poincaré (1905) arrivarono a risultati simili.* Studieremo quanto prima queste formule di trasformazione dal punto di vista della teoria di Einstein, perciò per ora preferiamo non occuparcene. Vogliamo considerare piuttosto l'influenza che questo nuovo sviluppo della teoria di Lorentz esercitò sull'idea dell'etere.

* Da un punto di vista storico è interessante notare che le formule di trasformazione, oggi note come trasformazioni di Lorentz (p. 282, [70a]), erano state ricavate da Voigt già nel 1887, in uno studio ancora fondato sulla teoria elastica della luce.

Nella nuova teoria, conformemente ai risultati sperimentali, vale un principio di relatività riferito all'elettrodinamica, secondo cui un osservatore percepisce lo stesso fenomeno indipendentemente dal fatto che il suo sistema sia a riposo nell'etere o si muova di moto rettilineo e uniforme. Egli non ha alcun modo di distinguere fra un sistema e l'altro, poiché, anche nel caso di corpi che si muovano nell'universo indipendentemente dall'osservatore, non è possibile riconoscere il moto assoluto rispetto all'etere, ma soltanto il moto relativo. Così due osservatori in moto relativo fra loro, possono a ugual diritto asserire di essere a riposo nell'etere, senza che vi sia alcuna possibilità, né da un punto di vista sperimentale, né da un punto di vista teorico, di decidere quale dei due abbia ragione.

Queste considerazioni assumono nei confronti del concetto di etere una posizione analoga a quella che il principio di relatività della meccanica classica ha rispetto allo spazio assoluto di Newton (p. 94). In quest'ultimo caso la conclusione cui si arriva è che nessun punto nello spazio assoluto ha un reale significato fisico, poiché in esso non ha alcun senso fissare e riconoscere in un secondo tempo un qualsiasi punto. Allo stesso modo dobbiamo ora ammettere che definire un punto nell'etere non ha alcun carattere di realtà nell'ambito della fisica, per cui l'etere perde completamente la sua natura di sostanza materiale. È ovvio cioè che, se due osservatori in moto relativo fra loro possono affermare a buon diritto di essere fermi nell'etere, non vi è ragione di supporre l'esistenza di un simile mezzo.

Il risultato di uno sviluppo rigoroso della teoria dell'etere è quindi la scomparsa di questa ipotesi come concetto fondamentale. Ma questa rinuncia non fu certamente facile, se è vero che lo stesso Lorentz, le cui geniali ipotesi e continue ricerche avevano determinato questa situazione di crisi per la teoria, esitò a lungo prima di compiere questo passo. Il fatto è che l'etere era espressamente concepito come la sostanza attraverso cui le vibrazioni luminose o in generale le forze elettromagnetiche dovevano propagarsi nel vuoto, dal momento che sembrava inconcepibile che potesse esistere una vibrazione senza

un ente che vibri. D'altra parte l'esistenza nel vuoto di vibrazioni osservabili è al di là di ogni verifica sperimentale: i fenomeni luminosi o elettromagnetici sono osservabili solo per effetto della loro connessione con le sostanze materiali. Il vuoto, lo spazio completamente privo di materia, non può essere oggetto di osservazione. Tutto ciò che noi possiamo sapere è che un segnale parte da un corpo e ne raggiunge un altro dopo un certo intervallo di tempo; ma ciò che capita in questo intervallo è puramente ipotetico o, più precisamente, dev'essere oggetto di appropriate ipotesi fisiche. Non vi è alcun limite per i fisici teorici nell'assegnare proprietà particolari al vuoto, se non che queste proprietà servano a correlare cambiamenti di stato dei mezzi materiali.

Questo punto di vista rappresenta un passo avanti verso una maggiore astrazione, in quanto elimina dalla scienza idee precedentemente accettate come componenti ineliminabili del nostro pensiero. Nello stesso tempo esso conduce a considerare validi per una descrizione della realtà fisica soltanto i dati dell'esperienza diretta, scartando tutte le descrizioni e le analogie superflue che traggano origine da esperimenti imprecisi e grossolani.

Da questo momento l'etere come sostanza materiale scompare dalla teoria e viene sostituito dal campo elettromagnetico, inteso come un utile strumento matematico per la descrizione dei processi che avvengono nella materia e delle loro relazioni.* Resta però da risolvere il problema di costruire una nuova descrizione della realtà che tenga conto di queste basi più astratte, ma empiricamente legittime. Come abbiamo già ricordato, Lorentz e Poincaré riuscirono in questo scopo mediante un'accurata analisi delle proprietà delle equazioni di Maxwell, consentita dalla vastità delle loro conoscenze

* Negli ultimi anni Einstein propose di chiamare "etere" lo spazio vuoto di materia in cui agiscono forze gravitazionali ed elettromagnetiche, senza che questa parola denoti una qualsiasi sostanza. Non è possibile quindi fissare un punto nell'"etere" e non ha alcun significato parlare di moto relativo rispetto all'"etere". In questo senso è lecito parlare di un "etere" e anzi questa espressione, una volta sanzionata dall'uso secondo questo nuovo significato, può essere conveniente.

matematiche. Tuttavia Lorentz si dimostrò così legato all'ipotesi di un etere a riposo, da non comprendere il significato fisico dell'equivalenza fra tutti i sistemi di riferimento considerati; egli continuò a credere che uno di essi dovesse identificarsi con l'etere a riposo. Un passo avanti fu invece compiuto da Poincaré, che comprese chiaramente come fosse insostenibile il punto di vista di Lorentz e come l'equivalenza matematica di vari sistemi di riferimento dovesse portare alla formulazione di un principio di relatività. Egli individuò inoltre con altrettanta chiarezza le conseguenze della sua teoria, ma non riuscì a compiere la necessaria astrazione fisica, o piuttosto filosofica, che avrebbe potuto rendere la teoria della relatività indipendente dalle equazioni di Maxwell.

Questa decisiva posizione fu assunta da Einstein. Egli notò che per superare le difficoltà che ostacolavano il completo sviluppo di una teoria relativistica era necessaria una revisione dei concetti di spazio e tempo, basati nell'accezione corrente su ipotesi non provate dai fatti, e formulò una nuova teoria che non tenesse alcun conto di simili nozioni preconcepite.

6.

*Il principio di relatività speciale di Einstein*1. *Il concetto di simultaneità*

Le difficoltà che si volevano superare applicando il principio di relatività ai fenomeni elettrodinamici consistevano nel mettere d'accordo le seguenti due affermazioni apparentemente contraddittorie: 1) secondo la meccanica classica la velocità di un moto qualsiasi assume valori differenti per due osservatori che si muovono l'uno rispetto all'altro;

2) l'esperienza ci insegna che la velocità della luce non dipende dallo stato di moto dell'osservatore e ha sempre lo stesso valore c .

La prima teoria dell'etere tentò di eliminare la contraddizione tra queste due leggi dividendo la velocità della luce in due componenti: (a) la velocità dell'etere in cui la luce si propaga, e (b) la velocità della luce rispetto all'etere. Di queste due (a) può essere descritta in maniera appropriata per mezzo dei coefficienti di trascinamento. Tuttavia questa teoria riuscì a eliminare la contraddizione soltanto nel caso di quantità del primo ordine. Per conservare la legge sulla costanza della velocità di propagazione della luce, la teoria di Lorentz dovette introdurre per ogni sistema in moto delle particolari unità di misura per le lunghezze e per gli intervalli di tempo. La compatibilità delle affermazioni 1) e 2) sembra allora provocata da una specie di "illusione fisica".

Nel 1905 Einstein riconobbe che le contrazioni di Lorentz e i tempi locali non erano artifici matematici e illusioni fisiche ma riguardavano la vera natura dei concetti di spazio e di tempo.

Delle due affermazioni 1) e 2) la prima è puramente teorica e concettuale, mentre la seconda è basata sull'esperienza.

Ora, dal momento che la seconda affermazione, che la velocità della luce è costante, deve ritenersi confermata con certezza dall'esperienza, non rimane altro che abbandonare la prima legge e di conseguenza le idee sullo spazio e sul tempo fin qui accettate. Pertanto ci dev'essere un errore in queste idee, o almeno un falso ragionamento, dovuto a confusione tra abitudine a certe opinioni e coerenza logica del pensiero, una tendenza che ben sappiamo di quale ostacolo sia per il progresso.

Ora, il concetto di simultaneità è una falsa opinione di questo tipo. Si considera di per sé evidente che abbia significato affermare che un evento che si verifichi nel punto A , per esempio sulla terra, e un evento verificatosi nel punto B , per esempio sul sole, sono simultanei. Si ammette che concetti come "istante di tempo", "simultaneità", "prima", "dopo" e così via, abbiano in sé un significato a priori valido per l'intero universo. Questo era anche il punto di vista di Newton, quando postulò l'esistenza di un tempo assoluto o durata degli intervalli di tempo (p. 79) che doveva trascorrere "ugualmente senza riguardo per qualsiasi fattore esterno".

Ma non esiste certamente un tale concetto di tempo per il fisico che si preoccupa dell'aspetto quantitativo della realtà. Egli non vede alcun significato nell'affermazione che un evento in A e un evento in B sono simultanei, dal momento che non ha modo di decidere la verità o la falsità di tale asserzione. Per riuscire a decidere se sono simultanei due eventi in luoghi differenti dobbiamo avere in ogni punto degli orologi dei quali possiamo essere certi che procedano nello stesso modo ovvero scandiscano il secondo "in maniera sincrona". In tal modo il problema si riduce a questo: possiamo definire un modo di verificare l'uguale andamento dei battiti di due orologi posti in luoghi differenti?

Immaginiamo i due orologi in A e B separati da una distanza l e in quiete in un sistema di riferimento S . Ora vi sono due metodi per regolare gli orologi in modo che abbiano lo stesso andamento:

1) Possiamo portarli nello stesso punto, regolarli in maniera tale che procedano all'unisono, e quindi riportarli rispettivamente in *A* e in *B*.

2) Possiamo usare dei segnali di tempo per paragonare gli orologi.

In pratica vengono adottati entrambi i procedimenti. Una nave in mare è equipaggiata con un cronometro che scandisce il tempo in modo preciso e che è stato regolato in accordo con un orologio campione nel porto di base; in più essa riceve segnali di tempo per mezzo del radiotelegrafo.

Il fatto che tali segnali siano considerati necessari conferma la nostra mancanza di fiducia nelle misure di tempo "trasportate". L'inefficienza pratica del metodo di trasportare gli orologi sta nel fatto che così aumenta con continuità anche il più piccolo errore nello scandire il secondo. Ma se pure si fa l'ipotesi che esistano orologi ideali esenti da errore (come quelli che il fisico è convinto di avere trovati nelle vibrazioni atomiche che provocano l'emissione di luce), non è ammissibile da un punto di vista logico fondare su di essi la definizione di tempo per sistemi che si muovano gli uni relativamente agli altri; infatti che due orologi, per quanto precisi siano, scandiscano insieme il tempo non lo si può accertare in maniera diretta, cioè senza l'intervento di segnali, a meno che non si trovino nello stesso luogo e in quiete l'uno rispetto all'altro. Non si può stabilire senza segnali che essi mantengono lo stesso andamento quando sono in moto relativo. L'affermazione contraria appartiene a quel tipo di pure ipotesi che dobbiamo evitare se vogliamo essere coerenti con i principi della ricerca fisica. In tal modo siamo obbligati a usare il metodo dei segnali per definire il tempo nei sistemi che si muovono relativamente gli uni agli altri. Se questo ci permette di giungere a un metodo di misurare il tempo che è esente da contraddizioni, in un secondo tempo dovremo esaminare come deve essere fatto un orologio ideale in modo che segni sempre il tempo "giusto" anche in sistemi che si muovono in modo arbitrario (vedi p. 299).

Immaginiamo una lunga serie di chiatte *B*, *C*, *D*, trainate sul

mare da un rimorchiatore *A*. Supponiamo che non ci sia vento ma che la nebbia sia così fitta che ciascuna imbarcazione non sia visibile dalle altre. Ora, se vogliamo paragonare gli orologi sulle chiatte a quelli sul rimorchiatore, dovremo usare segnali sonori. Il rimorchiatore *A* suona la sirena alle 12, e quando il suono viene udito sulle chiatte, le persone su di esse mettono a posto i loro orologi sulle 12. Ma è chiaro che così facendo essi commettono un piccolo errore, in quanto il suono impiega un certo intervallo di tempo per arrivare da *A* fino a *B*, *C*, *D*. Si può eliminare questo errore se si conosce la velocità *c* del suono. Il simbolo *c* rappresenta circa 340 m/s. Se la chiatta *B* si trova ad una distanza $l=170$ m dietro *A*, il suono impiegherà $t=l/c=170/340=\frac{1}{2}$ s per viaggiare da *A* a *B*, e quindi nel momento in cui giunge il segnale sonoro, un orologio su *B* deve essere posto mezzo secondo dopo le 12. Ma di nuovo questa correzione è giusta solo se sia il rimorchiatore sia le chiatte sono fermi. Dal momento che essi si muovono è chiaro che il suono impiega un tempo minore per andare da *A* e *B*, poiché la chiatta *B* si dirige verso l'onda sonora. Se vogliamo apportare la correzione esatta dobbiamo conoscere la velocità assoluta delle imbarcazioni rispetto all'aria e se non la conosciamo non è possibile con l'aiuto del suono paragonare intervalli di tempo in maniera assoluta. Se il tempo è limpido possiamo usare la luce al posto del suono. Poiché la luce viaggia con una velocità di gran lunga maggiore, l'errore sarà in ogni modo piccolo; in una questione di principio però la grandezza in sé non ha alcuna importanza. Se immaginiamo al posto del rimorchiatore e delle chiatte un corpo celeste in un mare di etere, tutte le nostre considerazioni rimangono immutate e ugualmente valide. Nell'universo non esiste un messaggero più rapido della luce. Noi vediamo che la teoria dell'etere assoluto e in quiete porta alla conclusione che un paragone tra intervalli di tempo valido in assoluto può essere effettuato per sistemi in moto solo se noi conosciamo tale moto rispetto all'etere.

Ma il risultato delle ricerche sperimentali è stato che è impossibile rivelare il moto rispetto all'etere per mezzo di esperimenti fisici.

Da questo segue che il concetto assoluto di simultaneità, analogamente, non può essere in alcun modo verificato.

Il paradosso contenuto in questa affermazione sparisce se si ricorda che per paragonare intervalli di tempo con segnali luminosi si deve conoscere il valore esatto della velocità della luce, mentre la misura di quest'ultima quantità nuovamente richiede la determinazione di un intervallo di tempo. In tal modo ovviamente ci stiamo muovendo in un circolo vizioso.

Anche se non possiamo giungere a un concetto assoluto di simultaneità, tuttavia è possibile, come ha dimostrato Einstein, definire una "simultaneità relativa" per tutti gli orologi che sono in quiete gli uni rispetto agli altri senza conoscere il valore della velocità dei segnali.

Dimostreremo questo fatto prima per l'esempio del rimorchiatore e delle chiatte (fig. 112). Quando tutti sono in quiete possiamo far

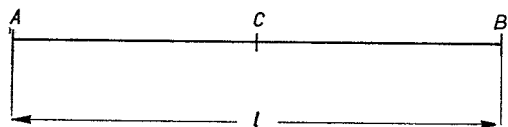


Fig. 112. La definizione di simultaneità.

sì che gli orologi sulle barche A e B abbiano lo stesso andamento nel seguente modo: poniamo una barca C esattamente a metà strada tra le barche A e B e facciamo partire un segnale da C . Allora questo sarà udito simultaneamente in A e in B .

Se ora la serie di barche, che chiameremo S , si muove, noi possiamo chiaramente applicare lo stesso metodo. Se non accade che coloro che sono sulle barche si muovano rispetto all'aria essi saranno convinti che gli orologi su A e su B siano stati sincronizzati.

Supponiamo che una seconda serie di chiatte S' , in cui A' , B' , C' sono esattamente alla stessa distanza delle corrispondenti chiatte della prima serie S , paragonino i loro orologi esattamente nello stesso modo. Se ora una serie raggiunge l'altra, sia questa o no in quiete,

le imbarcazioni passeranno le une accanto alle altre, e ad un certo istante A coinciderà con A' , B con B' , e gli occupanti possono verificare se i loro orologi vanno d'accordo. Certamente troveranno che non lo sono. Anche se casualmente A e A' sono esattamente sincroni, B e B' non lo saranno.

Questo porterà l'errore in evidenza. Quando le barche sono in moto evidentemente il segnale dal punto di mezzo C impiega più tempo per arrivare all'imbarcazione A che la precede, e meno per arrivare all'imbarcazione B che la segue, di quanto non ne impieghi quando le barche sono in quiete, poiché A si allontana dall'onda sonora mentre B le si avvicina, e questa differenza varia con la velocità delle due serie di barche.

Nel caso del suono, un "solo" sistema ha il tempo giusto e precisamente quello che è in quiete rispetto all'aria. Nel caso della luce, tuttavia, non è possibile fare un'affermazione analoga poiché il moto assoluto rispetto all'etere in cui la luce si propaga è un concetto che, secondo tutte le esperienze, non ha alcuna realtà fisica. Il metodo di paragonare gli orologi che abbiamo ora illustrato per il suono è, naturalmente, applicabile anche per la luce. Gli orologi su A e B sono regolati in modo tale che ogni lampo di luce partito dal punto medio C della distanza AB raggiunge gli orologi A e B proprio quando le loro lancette sono nella stessa posizione. In tal modo ogni sistema può ottenere il sincronismo dei propri orologi. Ma quando due di questi sistemi s'incontrano, anche se gli orologi A , A' segnano lo stesso tempo, certamente B, B' hanno le lancette in posizione differente. Ciascun sistema può pretendere con uguale diritto di segnare il tempo giusto, poiché ciascuno può affermare di essere in quiete, dal momento che le leggi fisiche sono le medesime in ognuno. Ma quando due pretendono ciò che, per il suo stesso significato, può appartenere a uno solo, bisogna concludere che la pretesa stessa è priva di significato. *Non esiste nulla che si possa chiamare simultaneità assoluta.*

Chiunque riesca ad afferrare questo concetto troverà difficile capire come mai ci siano voluti molti anni di accurate ricerche per

riconoscere per vero questo semplice fatto. È la ripetizione dell'antica storia dell'uovo di Colombo.

Il problema successivo è se il metodo di paragonare gli orologi da noi introdotto conduca a un concetto coerente di tempo relativo. Questo è proprio ciò che accade. Per vederlo useremo la rappresentazione di Minkowski degli eventi o punti di universo in un piano x, t ; ci limiteremo cioè a moti nella direzione x e trascureremo quelli nelle direzioni y e z (fig. 113a).

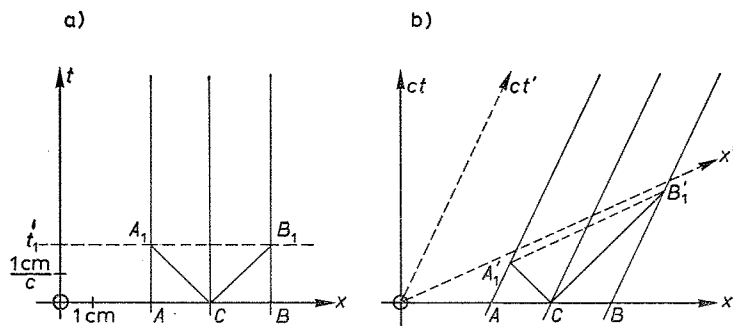


Fig. 113. a) I punti A, B, C che sono in quiete sull'asse x hanno linee di universo parallele all'asse ct . Le linee di universo di un segnale luminoso, che parte da C nell'istante $t=0$, raggiungono simultaneamente A e B nei punti di universo A_1 e B_1 nell'istante t_1 .

b) I punti A, B, C si muovono con velocità v . Essi sono in quiete nel sistema x', ct' . A'_1 e B'_1 sono i punti di universo dove il segnale che parte da C raggiunge A e B . Le equazioni dell'asse x' sono:

$$x' = 0 \quad x = \frac{c^2}{v} t = \frac{c}{v} \times ct.$$

Le equazioni dell'asse ct' sono: $ct' = 0, x = vt = (v/c) \times ct$.

I punti A, B, C , in quiete sull'asse x , sono rappresentati nel sistema di coordinate xt da tre parallele all'asse t . Il punto C sia situato a metà distanza tra A e B . Nell'istante $t=0$ da questo punto si fa partire un segnale luminoso in entrambe le direzioni.

Ammettiamo che il sistema S sia "in quiete", cioè che la velocità

della luce sia la stessa in entrambe le direzioni. Quindi i segnali luminosi che si muovono verso sinistra e verso destra sono rappresentati da linee rette che sono ugualmente inclinate sull'asse x e che noi chiamiamo *linee di luce*. Faremo in modo che la loro inclinazione sia di 45 gradi; questo evidentemente equivale a dire che la stessa distanza che rappresenta l'unità di lunghezza di 1 cm sull'asse x nella figura, rappresenta sull'asse t l'intervallo di tempo molto piccolo di 1 cm/c che la luce impiega a percorrere la distanza di 1 cm. Per semplicità è meglio usare $c \cdot t$ invece di t come misura del tempo. Questo significa che sull'asse del "tempo" il tempo viene misurato dal cammino luminoso, cioè lo spazio $c \cdot t$ percorso dalla luce durante il tempo t .

I valori di t dei punti d'intersezione A_1, B_1 delle linee di luce con le linee di universo dei punti A e B danno il tempo di arrivo dei due segnali luminosi. Vediamo che A_1 e B_1 si trovano su una parallela all'asse x e hanno lo stesso valore di t , cioè sono simultanei.

Successivamente supponiamo che i tre punti A, B, C si muovano uniformemente con la stessa velocità. Allora le loro linee di universo sono di nuovo parallele, ma inclinate sull'asse x (fig. 113b). I segnali luminosi sono rappresentati dalle stesse linee di luce, le quali hanno la loro origine in C come sopra, ma i loro punti di intersezione A'_1, B'_1 con le linee di universo A, B non sono ora su una parallela all'asse x ; pertanto essi non sono simultanei nel sistema di coordinate x, t , e B'_1 è posteriore ad A'_1 . D'altra parte un osservatore che si muova con il sistema può con uguale diritto asserire che A'_1, B'_1 sono eventi simultanei (punti di universo). Egli userà un sistema S' di coordinate x', ct' nel quale i punti A'_1, B'_1 sono su una parallela all'asse x' . Le linee di universo dei punti A, B, C sono naturalmente parallele all'asse ct' , dal momento che A, B, C sono in quiete nel sistema S' e quindi le loro coordinate x' hanno lo stesso valore per tutti i valori del tempo.

Ne segue che il sistema in moto S' viene rappresentato nel piano x, ct da un sistema di coordinate oblique x', ct' , nel quale entrambi gli assi sono inclinati rispetto agli assi originali.

Ricordiamo ora che nella meccanica ordinaria i sistemi inerziali sono rappresentati allo stesso modo da coordinate oblique nel piano x, ct con l'asse ct diretto in maniera arbitraria, mentre l'asse x rimane sempre il medesimo (p. 101). Noi abbiamo già fatto notare che dal punto di vista matematico questa è una mancanza di simmetria che viene eliminata dalla teoria della relatività. Ora vediamo chiaramente come questo accada in conseguenza della nuova definizione di simultaneità. Nello stesso tempo uno sguardo alla figura ci convince che tale definizione deve essere coerente in sé, poiché non significa altro che usare coordinate oblique invece che rettangolari.

Le unità di lunghezza e di tempo non vengono ancora determinate dalla costruzione geometrica, poiché essa si vale solamente del fatto che in un sistema S la luce si propaga con uguale velocità in tutte le direzioni, ma non della legge per la quale la velocità della luce ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali. Se noi ammettiamo anche quest'ultima, giungiamo alla sistemazione definitiva della cinematica di Einstein.

2. La cinematica di Einstein e le trasformazioni di Lorentz

Ricordiamo di nuovo le ipotesi della cinematica di Einstein.

1. *Il principio di relatività.* Esistono infiniti sistemi di riferimento in moto rettilineo e uniforme l'uno rispetto all'altro, in cui le leggi fisiche, che originariamente erano riferite allo spazio assoluto o all'etere stazionario, assumono la forma più semplice.

2. *Il principio della costanza della velocità della luce.* La velocità della luce, misurata impiegando regoli e orologi dello stesso tipo, è costante in tutti i sistemi inerziali.

Ci occuperemo ora di stabilire quali relazioni intercedano, nei vari sistemi inerziali, tra le lunghezze e i tempi; a tale scopo ci limiteremo a considerare moti paralleli a una determinata direzione, per esempio alla direzione dell'asse x .

Seguiremo due metodi; il primo consiste nell'assumere, come base di partenza, i diagrammi discussi alla fine del paragrafo precedente, e il secondo nel derivare relazioni algebriche fra i due sistemi S ed S' di velocità relativa v .

Per ottenere una relazione numerica fra i due sistemi, dobbiamo conoscere le unità di S e di S' , e vedere da quale relazione sono legate. Dobbiamo cioè trovare le espressioni delle unità relative agli assi x' e ct' del sistema S' della figura 113b, che rappresentino, in S' , la stessa lunghezza e lo stesso intervallo di tempo delle corrispondenti unità del sistema S . Supponiamo ora che il segmento \overline{OE} (fig. 114a) rappresenti un regolo di lunghezza unitaria in quiete nel sistema S . Le linee d'universo degli estremi del regolo sono l'asse ct e la retta, ad esso parallela e passante per E , che taglia l'asse x' nel punto e' .

Consideriamo poi il regolo a riposo nel sistema S' . Le sue linee d'universo saranno ora l'asse ct' e la retta, parallela a ct' , che passa per il punto E' di x' e che interseca l'asse x in e . Il segmento $\overline{OE'}$ rappresenta l'unità di lunghezza del sistema S' .

Per ragioni di brevità, designeremo i segmenti con le stesse lettere che abbiamo impiegato per i loro estremi (per esempio, \overline{OE} verrà indicato con la lettera E , e così via).

Per illustrare il significato di e' , supponiamo che un osservatore, in quiete in S' , voglia misurare la lunghezza del regolo unitario a riposo in S . Ciò significa che egli è in grado di osservare simultaneamente entrambi gli estremi O ed e' del regolo. L'unità del sistema S si muove rispetto all'osservatore in S' ; quindi è essenziale che l'osservazione nel sistema S' sia simultanea. Poiché E' è l'unità di lunghezza di S' , la misura della corrispondente unità di S , eseguita da un osservatore solidale ad S' , sarà la (e'/E') -sima parte di E . Se $E=1$ cm, l'osservatore nel sistema S' troverà e'/E' cm. Lo stesso ragionamento si può fare per e ; in questo caso le due misure sono correlate dal fattore e/E .

In base al principio di relatività i due sistemi S ed S' sono equivalenti, nel senso che i rapporti e'/E' ed e/E devono essere

uguali:

$$e'/E' = e/E \quad \text{cioè} \quad Ee' = E'e. \quad [\alpha]$$

Questa relazione ci permette di costruire il punto E' .

In modo analogo possiamo dedurre l'unità di tempo $E_{ct'}$ del sistema S' a partire dall'unità di tempo E_{ct} di S .

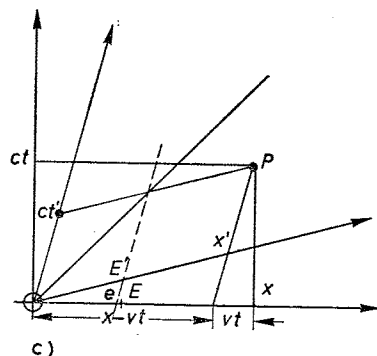
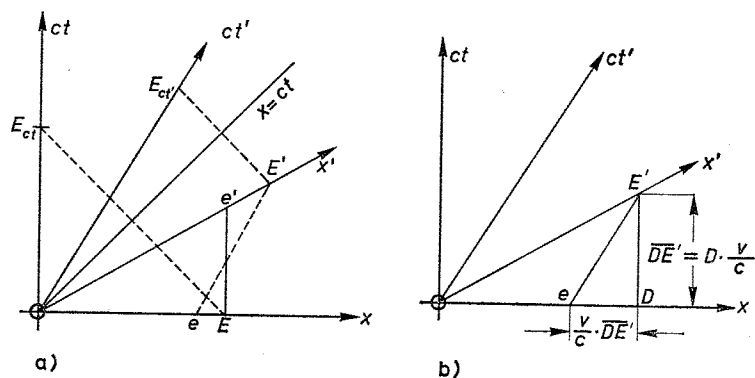


Fig. 114. a) Unità di lunghezza e di tempo di $S(E, E_{ct})$ e di $S'(E', E_{ct'})$. \overline{Oe} rappresenta, in S , il regolo di lunghezza unitaria in quiete in S' , mentre $\overline{Oe'}$ rappresenta, in S' , lo stesso regolo a riposo in S .

b) Calcolo del rapporto E'/e .

c) Trasformazione di Lorentz delle coordinate di un punto d'universo P .

Dalla figura 114a si ottengono due relazioni: *

$$e'^2 = E^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right), \quad [\beta]$$

$$c^2 = E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad [\gamma]$$

Siamo ora in grado di trasformare le coordinate x e t di un punto d'universo P nel sistema S , nelle corrispondenti coordinate x' e t' nel sistema S' .

La figura 114c rappresenta i sistemi S ed S' , le loro unità di lunghezza, E, E' e il segmento e . Un punto P , che nel sistema S ha coordinate x, ct , nel sistema S' assume le coordinate x', ct' . Possiamo ora misurare le lunghezze in unità U (per esempio centimetri) (fig. 114); poiché le coordinate sono espresse in S in unità E , e in S' in unità E' , si ha

$$x' = \frac{\overline{Ox'}}{E'},$$

dove $\overline{Ox'}$ è la lunghezza misurata in unità U e x' la coordinata; inoltre si ha rispettivamente

$$x = \frac{\overline{Ox}}{E} \quad \text{oppure} \quad (x - vt) = \frac{\overline{O(x - vt)}}{E}.$$

* La prima si ricava applicando il teorema di Pitagora al triangolo OEe' ($\overline{Ee'} = Ev/c$). Per la seconda, dalla figura 114b e dal teorema di Pitagora segue $E'^2 = D^2(1 + v^2/c^2)$; poiché $c = D - De = D(1 - v^2/c^2)$, si ha:

$$E'^2 = e^2 \frac{1 + v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^2}.$$

Da questa equazione e dalla $[\beta]$ si ha, estraendo la radice quadrata:

$$E' = e \frac{\sqrt{1 + v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2}, \quad e' = E \sqrt{1 + v^2/c^2},$$

da cui, in base alla $[\alpha]$, si ottiene la $[\gamma]$.

Dalla figura 114c si ottengono le relazioni:

$$\frac{x'}{x-vt} = \frac{\overline{Ox'}}{O(x-vt)} \frac{E}{E'}$$

e

$$\frac{\overline{Ox'}}{O(x-vt)} = \frac{E'}{e}$$

Sostituendo la seconda nella prima, si ha in base alla [γ]:

$$\frac{x'}{(x-vt)} = \frac{E}{e} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Per le coordinate temporali si ha analogamente:

$$\frac{ct'}{(ct-(v/c)x)} = \frac{E}{e} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Le ultime due formule, e le relazioni $y'=y$ e $z'=z$ (y e z sono infatti perpendicolari alla direzione del moto e quindi non cambiano) costituiscono la cosiddetta *trasformazione di Lorentz*, che permette di calcolare le coordinate di un punto d'universo nel sistema S' , una volta note le corrispondenti coordinate in S . Le equazioni precedenti, che solitamente si scrivono:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad [70a]$$

sono esattamente le formule che Lorentz trovò studiando le equazioni di campo di Maxwell (vedi p. 266).

Vogliamo ora derivare le stesse trasformazioni mediante considerazioni di carattere algebrico. Supponiamo che un punto d'universo P , di coordinate x, t in S ed x', t' in S' , si trovi sulla linea d'universo $x'=C'$, che rappresenta un punto in quiete di posizione spaziale C' nel sistema S' . Nel sistema S l'equazione di questa linea d'universo è $x-vt=C$ (fig. 114c). Le due equazioni rappresentano

la stessa linea d'universo. Dividendo membro a membro si ottiene: $(x-vt)/x'=c/c'=\alpha$, dove α, C e C' sono costanti sulla linea d'universo. Si ha quindi

$$\alpha x' = x - vt. \quad [\delta]$$

Tuttavia poiché i due sistemi, in base al principio di relatività, sono equivalenti, possiamo applicare le stesse considerazioni a una linea d'universo di un punto che si trovi in quiete in S , con la sola eccezione che dobbiamo cambiare il segno della velocità relativa v . Pertanto $x'+vt'$ deve essere proporzionale a x , e in base all'equivalenza dei due sistemi, il fattore di proporzionalità α sarà lo stesso in entrambi i casi:

$$\alpha x = x' + vt'. \quad [\epsilon]$$

Utilizzando la [δ] e la [ε] si può esprimere t' in funzione di x e di t . Si ottiene:

$$vt' = \alpha x - x' = \alpha x - \frac{x-vt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} [(\alpha^2 - 1)x + vt],$$

cioè

$$\alpha t' = \frac{\alpha^2 - 1}{v} x + t.$$

Da quest'ultima equazione e dalla [δ] si possono ricavare t' e x' , una volta note t e x . Il fattore di proporzionalità α deve essere scelto in modo da non violare il principio della costanza della velocità della luce.

Consideriamo ora un segnale luminoso emesso dall'origine dei nostri sistemi. Secondo il principio della costanza della velocità della luce, nei due sistemi le equazioni della linea d'universo del segnale luminoso sono date rispettivamente da $x=ct$ e $x'=ct'$.

Ponendo in [δ] ed [ε] $x=ct$ e $x'=ct'$, si ha:

$$\alpha ct' = ct - vt = (c-v)t,$$

$$\alpha ct = ct' + vt = (c+v)t',$$

e moltiplicando membro a membro:

$$\alpha^2 c^2 t' t = (c-v)(c+v)t' t$$

cioè

$$\alpha^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Si ottengono quindi le formule di trasformazione:

$$\alpha x' = x - vt, \quad \alpha t' = -\frac{v}{c^2} x + t.$$

Siamo giunti così allo stesso risultato che avevamo ottenuto in base a considerazioni di carattere geometrico.

Volendo esprimere x, y, z e t in funzione di x', y', z' e t' , è necessario risolvere le equazioni [70a] rispetto a x, y, z e t . A questo fine possiamo servirci del principio di equivalenza (dei sistemi S ed S'), senza bisogno di nessun calcolo; dobbiamo solo cambiare v in $-v$. Si ha perciò

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad [70b]$$

che si possono verificare direttamente con semplici calcoli.

È particolarmente interessante il caso in cui la velocità relativa v dei due sistemi sia molto piccola rispetto a quella della luce: le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo (formula [29], p. 100). Se infatti si può trascurare v/c rispetto all'unità, dalle [70] si ottiene:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z = z', \quad t = t'.$$

Poiché nella maggior parte dei casi reali il rapporto v/c è piccolo rispetto all'unità, siamo ora in grado di comprendere come mai la meccanica di Newton e di Galileo abbia potuto soddisfare per molti secoli tutte le esigenze della fisica.

3. La rappresentazione geometrica della meccanica di Einstein

Prima di discutere il significato delle formule precedenti, cerchiamo di interpretare le connessioni fra due sistemi inerziali che esse mettono in evidenza. A tale scopo ci serviremo della rappresentazione geometrica dell' "universo" quadridimensionale x, y, z, t (oppure x, y, z, ct) di Minkowski, trascurando le coordinate y, z che restano invariate, e limitandoci a considerare il piano x, ct . Tutte le leggi cinematiche avranno allora una rappresentazione geometrica nel piano x, ct ; tuttavia è opportuno che le relazioni ottenute in forma geometrica, siano poi tradotte nel linguaggio ordinario della cinematica. Pertanto, una linea di universo deve essere vista come la rappresentazione del moto di un punto, e l'intersezione di due linee di universo come l'incontro di due punti in movimento. Se vogliamo visualizzare i processi rappresentati in figura, dobbiamo prendere un righello e muoverlo con velocità costante lungo l'asse t parallelamente all'asse x , facendo attenzione ai punti in cui lo spigolo interseca le linee di universo. Questi punti, che si muovono sullo spigolo avanti e indietro, danno un'idea del moto nello spazio.

Come abbiamo mostrato (p. 277), ogni sistema inerziale S è rappresentato da un insieme di assi obliqui nel piano x, ct , e la presenza in tale insieme di un sistema rettangolare si deve considerare del tutto accidentale, come si è visto chiaramente dalla nostra seconda dimostrazione.

Ogni punto dello spazio può essere considerato come sorgente di un'onda luminosa sferica che si propaga uniformemente in tutte le direzioni, di cui nelle nostre figure sono rappresentati soltanto i due segnali luminosi diretti lungo l'asse x : uno verso sinistra e l'altro verso destra. Essi corrispondono quindi nel piano x, ct a due linee rette che si intersecano e che naturalmente sono del tutto indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento, in quanto connettono un evento con l'altro, cioè punti del piano x, ct successivamente raggiunti dal segnale luminoso.

Nella figura 115 queste linee di luce sono rappresentate da due rette perpendicolari fra loro passanti per un punto di universo O , che si assume come origine di tutti i sistemi di coordinate x, ct considerati. Tali rette sono scelte come assi di un sistema di coordinate X, Y .

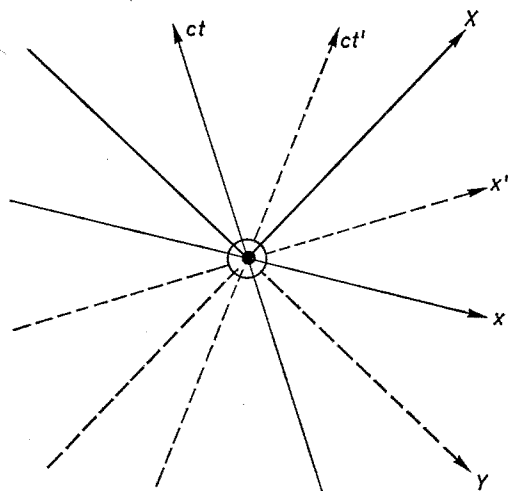


Fig. 115. Le linee invarianti X, Y corrispondono a segnali luminosi passanti per O . Le linee continue corrispondono a segnali che partono da O ; quelle tratteggiate a segnali diretti verso O .

Siamo qui alle radici della teoria di Einstein: nell' "universo" il sistema X, Y è fissato e determinato in modo unico; i suoi assi non sono linee nello spazio, ma sono le congiungenti di punti di universo, cioè di quei punti che corrispondono a punti dello spazio nell'istante in cui vengono raggiunti da un segnale luminoso emesso dall'origine. Questo sistema di coordinate invariante o "assoluto" è quindi un concetto del tutto astratto e dobbiamo abituarci a considerare tali astrazioni della teoria moderna come una sostituzione dell'idea di un etere materiale. La loro forza è nel fatto che esse non

implicano nulla che vada oltre i concetti necessari a interpretare i risultati dell'esperienza.

Le curve di calibrazione che intercettano sugli assi di un arbitrario sistema inerziale x, ct le unità di lunghezza e di tempo, devono essere solidali al sistema di riferimento assoluto X, Y . Il nostro problema è ora quello di trovare l'equazione invariante che le rappresenti.

Le linee di luce sono degli invarianti: l'asse X ($Y=0$) che in un sistema di riferimento S è rappresentato dall'equazione $x=ct$, in un altro sistema S' ha equazione $x'=ct'$; ciò esprime il fatto che la velocità della luce è la stessa in entrambi i sistemi. Vogliamo ora esprimere, in funzione delle coordinate x, X e servendoci della trasformazione di Lorentz [70], la differenza $x' - ct'$, uguale a zero per i punti dell'asse y . Si ha allora:

$$\begin{aligned} x' - ct' &= \frac{1}{\alpha} \left[(x - vt) - c \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \right] = \frac{1}{\alpha} \left[x \left(1 + \frac{v}{c} \right) - ct \left(1 + \frac{v}{c} \right) \right] = \\ &= \frac{1 + \beta}{\alpha} (x - ct) \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la consueta abbreviazione

$$\beta = v/c. \quad [71]$$

Da ciò segue che quando $x - ct = 0$, si ha anche $x' - ct' = 0$.

L'asse Y ($X=0$) ha equazione $x = -ct$, oppure $x' = -ct'$, e per ottenere l'analoga trasformazione da x' e ct' a x e ct rispettivamente è sufficiente cambiare c in $-c$ e β in $-\beta$ (mentre $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ resta invariata). Si ottiene così

$$x' + ct' = ((1 - \beta)/\alpha)(x + ct).$$

Da queste formule possiamo facilmente dedurre un'espressione invariante. Poiché infatti $(1 + \beta)(1 - \beta) = (1 - \beta^2) = \alpha^2$, moltiplicando le due equazioni si trova:

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct)$$

ossia

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2;$$

vale a dire che l'espressione:

$$F = x^2 - c^2 t^2 \quad [72]$$

è un invariante, chiamato per la sua importanza *invariante fondamentale*. La sua dimensione è come si vede $[L^2]$.

F consente innanzitutto di determinare in un arbitrario sistema di riferimento S le unità di lunghezza e di tempo, da misurarsi nei diversi sistemi con regoli e orologi identici. In seguito, ci limiteremo a indicare le lunghezze e le aree con il simbolo 1, trascurando le loro dimensioni, poiché la scelta delle unità fisiche non è importante per il nostro scopo.

Chiediamoci ora quali sono i punti di universo in cui F assume i valori $+1$ o -1 .

Si ha $F=+1$ nel punto $x=1, ct=0$ (fig. 116), che rappresenta

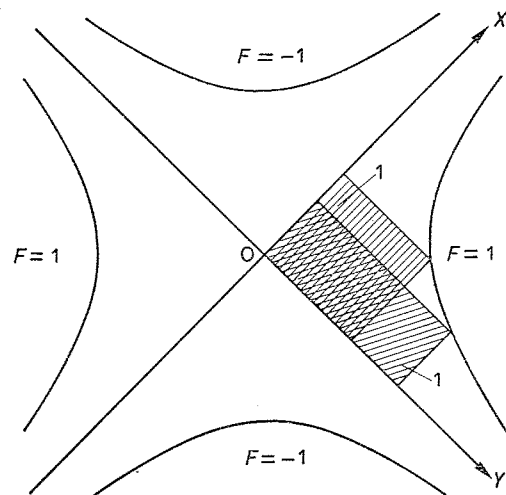


Fig. 116. Le curve di calibrazione $F=+1$ e $F=-1$.

l'estremo di un segmento di lunghezza unitaria il cui secondo estremo è l'origine al tempo $t=0$. Poiché tali considerazioni sono valide per ogni sistema di riferimento S , possiamo concludere che i punti di universo per cui $F=1$ definiscono l'unità di lunghezza a riposo in un sistema di riferimento arbitrario, come ora faremo vedere in modo più particolareggiato.

Analogamente, si ha $F=-1$ per il punto di universo $x=0, ct=1$, dove t indica il piccolo intervallo di tempo impiegato dalla luce per percorrere l'unità di lunghezza. Questo punto è così connesso all'unità di tempo dell'orologio a riposo nel sistema di riferimento S .

È ora facile costruire i punti $F=+1$ e $F=-1$ a partire dal sistema invariante X, Y . L'asse X è formato dai punti per cui $Y=0$ e quindi, dal momento che gli stessi punti di universo sono caratterizzati in ogni sistema di riferimento inerziale arbitrario dalla relazione $x=ct$, Y deve essere proporzionale a $x-ct$. Scegliendo opportunamente l'unità di Y , possiamo porre

$$Y = x - ct;$$

analogamente per l'asse X

$$X = x + ct.$$

Abbiamo così

$$XY = (x - ct)(x + ct) = x^2 - c^2 t^2 = F. \quad [73]$$

$F=XY$ rappresenta l'area di un rettangolo di lati X e Y . I punti di universo per cui $F=XY=1$ sono i vertici dei rettangoli di area unitaria formati dalle coordinate X e Y . Nella figura 116 è mostrato il caso particolare del quadrato di lato unitario, ed è evidente come per tutti gli altri rettangoli l'altezza sia inversamente proporzionale alla base, in accordo alla relazione $X=1/Y$. I punti X, Y per cui $XY=1$ individuano una curva che tende asintoticamente a incontrare gli assi x e y e alla quale si dà il nome di *iperbole equilatera*. Si osservi che se X e Y sono ambedue negative, il prodotto XY è ancora posi-

tivo e quindi la curva ha un secondo ramo, nel quadrante opposto, simmetrico al primo rispetto all'origine.

Per ciò che riguarda la curva $F=-1$, per la quale X e Y hanno segni opposti, vale un'identica costruzione negli altri due quadranti.

Le quattro curve così ottenute determinano in tutti i sistemi di riferimento le unità di lunghezza e di tempo.

Supponiamo ora che l'asse x incontri il ramo $F=+1$ dell'iperbole nei punti P e P' , e l'asse t incontri il ramo $F=-1$ nei punti Q e Q' (fig. 117). Tracciamo per P una parallela all'asse ct tangente nel punto P al ramo destro dell'iperbole $F=+1$. Facciamo in modo,

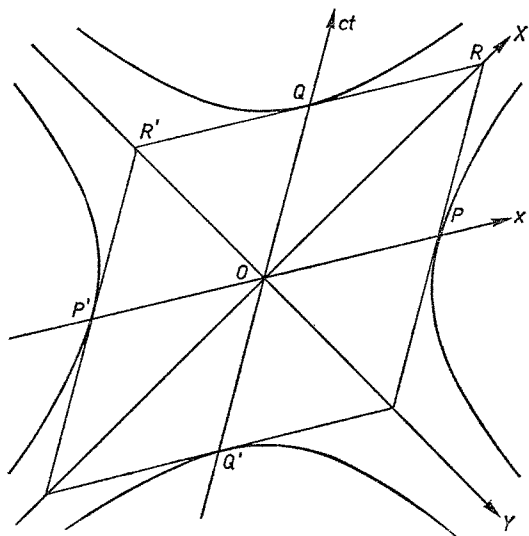


Fig. 117. Costruzione dell'asse x una volta noto l'asse ct , e viceversa.

in altre parole, che nessun punto di questo ramo dell'iperbole sia situato alla sinistra della retta, ma che la curva venga a trovarsi interamente alla sua destra e quindi tutti i suoi punti abbiano coordinate x più grandi della distanza \overline{OP} .

Ciò è esattamente quanto succede in realtà, poiché per ogni punto

della curva di equazione $F=x^2-c^2t^2=1$, risulta $x^2=1+c^2t^2$. Si ha così $x^2=1$ per il punto P che contemporaneamente appartiene all'asse x ($ct=0$), mentre per ogni altro punto della curva x^2 è maggiore di 1 essendo c^2t^2 una quantità positiva. Sarà allora $\overline{OP}=1$, mentre per ogni punto del ramo destro dell'iperbole $x > 1$.

Allo stesso modo, la parallela all'asse ct passante per P' è tangente al ramo sinistro dell'iperbole $F=1$ in P' , e le parallele per Q e Q' all'asse x toccano i rami dell'iperbole $F=-1$ in Q e Q' . Si ha così $\overline{OQ}=1$, dal momento che per il punto Q , che appartiene sia alla curva $F=x^2-c^2t^2=-1$ sia all'asse t ($x=0$), deve essere $ct=1$. Le due parallele all'asse ct passanti per P e P' incontrano X e Y nei punti R ed R' , che appartengono anche alle parallele in Q e Q' all'asse x . Ciò è naturale se si pensa che il punto R , per esempio, ha coordinata $x=ct$ in quanto si trova sull'asse X , e $x=1$ poiché appartiene alla parallela all'asse ct passante per P ; ct è quindi uguale a 1 e il punto R viene a trovarsi sulla parallela all'asse x passante per Q .

Questa costruzione dell'asse x è in accordo con quella precedente (p. 276) che definiva punti di universo simultanei. Infatti per l'asse ct , \overline{OQ} e le due parallele \overline{PR} e $\overline{P'R'}$ sono le linee di universo di tre punti, uno dei quali, O , è situato in mezzo agli altri due, P e P' ; un segnale luminoso propagantesi da O in ambedue le direzioni, sarà rappresentato dalle linee di luce \overline{OX} e \overline{OY} , e queste intersecheranno le due linee di universo parallele in R e R' . Ne segue quindi che, poiché la loro congiungente è parallela all'asse x , questi due punti di universo sono simultanei, come risulta appunto dalla nostra nuova costruzione.

Quanto abbiamo stabilito può essere ora riassunto nel seguente breve enunciato: *le posizioni reciproche degli assi x e ct di un sistema di riferimento S , sono tali che un asse è parallelo alla retta tangente all'iperbole invariante nel punto in cui questa interseca l'altro asse.*

L'unità di lunghezza è rappresentata dalla distanza \overline{OP} , e l'unità di tempo dalla distanza \overline{OQ} (si tenga presente che \overline{OQ} come misura di ct ha anch'essa le dimensioni di una lunghezza).

Ogni retta di universo passante per l'origine che intersechi i rami dell'iperbole invariante $F=1$ può essere assunta come asse x ; l'asse t resta allora fissato dalla parallela per O alla tangente dell'iperbole in P . Allo stesso modo l'asse ct può essere scelto come una linea di universo arbitraria che interseca i rami della curva $F=-1$, e il corrispondente asse x è univocamente determinato da una costruzione analoga alla precedente.

Queste regole sostituiscono le leggi della cinematica classica. In quel caso, l'asse x era lo stesso per tutti i sistemi inerziali, e su esso si fissava l'unità di lunghezza, mentre l'unità di tempo era definita da un segmento intercettato sull'asse ct , in generale obliquo, da una determinata retta parallela all'asse x (vedi fig. 41, p. 101).

Si potrebbe domandare allora come mai queste costruzioni, apparentemente così diverse, siano in pratica difficilmente distinguibili.

La risposta a tale domanda è immediata se si pensa all'enorme valore della velocità della luce, rispetto agli ordini di grandezza delle velocità che hanno generalmente i corpi nell'universo. Nelle nostre figure, ad esempio, l'unità di 1 cm corrisponde a $1 \text{ cm}/c = \frac{1}{3} \times 10^{-10} \text{ s}$. Se vogliamo rappresentare in figura 1 s e 1 cm con segmenti di identica lunghezza, dobbiamo chiaramente comprimere il disegno nella

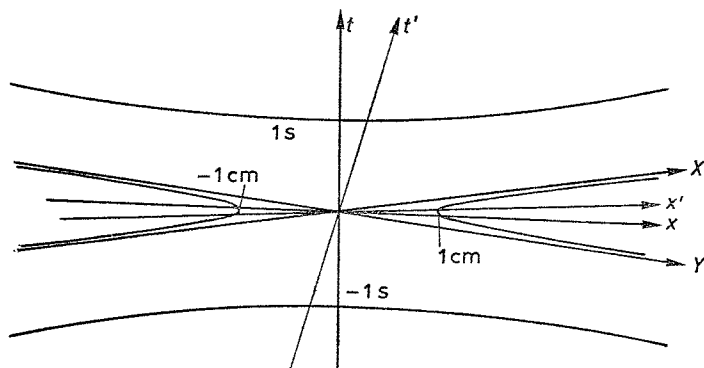


Fig. 118. Le curve $F=\pm 1$ in un sistema di coordinate x, t in cui si è supposto che c valga 10 cm/s. L'unità di tempo t (1 s) e l'unità di lunghezza x (1 cm) sono rappresentate da segmenti uguali.

direzione di t , di modo che tutte le distanze parallele all'asse t si riducano nel rapporto $(1 \text{ cm/s})/c$. Se, per ipotesi, c fosse uguale a 10 cm/s, la situazione sarebbe come quella descritta nella figura 118: le due linee di luce formerebbero un angolo molto piccolo entro il quale potrebbe variare la posizione dell'asse x , mentre l'angolo individuato dagli assi t diventerebbe maggiore e l'iperbole tenderebbe ad appiattirsi.

È chiaro quindi che per sistemi in moto con velocità relative v molto piccole rispetto a c , le unità di tempo differiscono impercettibilmente l'una dall'altra. Quanto maggiore è il valore di c tanto più piccolo è l'angolo entro cui possono situarsi gli assi x e t . Per il valore di c effettivo ($c=3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$) il disegno diventerebbe praticamente impossibile: le linee di luce sarebbero quasi coincidenti e l'asse x , che dev'essere compreso fra loro, finirebbe per avere direzione costante. Questa situazione è esattamente quanto si verifica nella cinematica ordinaria (vedi fig. 41, p. 101). La cinematica di Galileo è quindi un caso particolare, o, piuttosto, un caso limite di quella di Einstein, valida nell'ipotesi che la velocità della luce sia infinitamente grande.

4. Regoli e orologi in movimento

Ci proponiamo ora di risolvere i più semplici problemi della cinematica, quelli cioè che concernono la misura di medesime lunghezze e identici intervalli di tempo in differenti sistemi di riferimento.

Immaginiamo di avere un regolo di lunghezza unitaria, situato lungo l'asse x del sistema S , a partire dall'origine, e chiediamoci quale sia la sua lunghezza nel sistema S' . È senz'altro evidente che essa differirà dall'unità di lunghezza, poiché gli osservatori solidali con S' misureranno le posizioni degli estremi del regolo simultaneamente rispetto al loro sistema di riferimento. Ciò non significa simultaneamente nel sistema S , poiché anche se la posizione di un estremo del regolo è rilevata contemporaneamente in S e S' , ciò non sarà più

vero per l'altro estremo. Il sistema S' è in moto e la lettura degli osservatori solidali con esso si riferirà a una posizione successivamente occupata dal secondo estremo del regolo.

Questa complicazione potrebbe apparire, a prima vista, senza via d'uscita, tant'è vero che vi sono oppositori sprovvisti del principio di relatività che di fronte a questa difficoltà nel determinare la lunghezza di un regolo, esclamano indignati: "ecco a quali assurdità conduce un'incondizionata fiducia nella potenza delle formule matematiche", e su questa base condannano in blocco la teoria della relatività. Ma ai nostri lettori sarà ormai chiaro, speriamo, che le formule non costituiscono affatto una caratteristica essenziale della teoria e che ciò che veramente ci interessa sono soltanto delle relazioni fra differenti concetti, del tutto comprensibili anche senza far ricorso alla matematica. In questo senso, non solo potremmo rinunciare alle formule, ma anche a qualsiasi illustrazione geometrica, limitandoci a esporre la materia in un linguaggio per quanto possibile semplice e comune. Il libro acquisterebbe così una mole tanto considerevole che non si troverebbe né un editore disposto a pubblicarlo né qualcuno disposto a leggerlo.

Cerchiamo allora di risolvere il problema della lunghezza del regolo nei due sistemi S e S' , servendoci della solita figura nel piano x, ct (fig. 119).

Supponiamo che il regolo sia in quiete nel sistema $S(x, ct)$, e quindi che la linea di universo passante per il suo estremo nell'origine sia l'asse ct , e la linea di universo per il secondo estremo sia la parallela a distanza 1; quest'ultima sia tangente all'iperbole invariante nel punto P . Il regolo è così rappresentato ad ogni istante dalla striscia compresa fra queste due rette.

Dobbiamo ora determinare la lunghezza del regolo nel sistema $S'(x', t')$, in moto rispetto ad S ; quindi l'asse ct' è inclinato rispetto all'asse ct . Il corrispondente asse x' si trova allora disegnando la tangente all'iperbole nel punto Q' in cui questa è intersecata dall'asse ct' e poi tracciando per O la parallela OP' a questa tangente. La distanza OP' è l'unità di lunghezza sull'asse x' . La lunghezza

del regolo unitario in quiete nel sistema S , è determinata tuttavia nel sistema S' dalla distanza $\overline{OR'}$ intercettata sull'asse x' dalla striscia parallela che rappresenta il regolo. Poiché tale distanza è chiaramente minore di $\overline{OP'}$, e quindi $\overline{OR'}$ è minore di 1, il regolo nel sistema in moto S' risulterà accorciato.

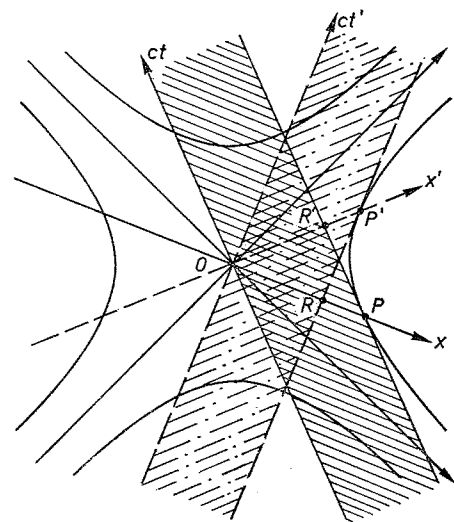


Fig. 119. La contrazione di Lorentz.

Questa è esattamente la contrazione prevista da Fitzgerald e da Lorentz per spiegare l'esperimento di Michelson e Morley; nel nostro caso, essa appare come una naturale conseguenza della cinematica di Einstein.

Anche nel caso opposto di un regolo in quiete nel sistema S' la cui lunghezza è misurata in S , il regolo appare contratto e non allungato. Esso è infatti rappresentato dalla striscia limitata dall'asse ct' e dalla linea di universo parallela passante per il punto P' ; poiché quest'ultima incontra l'asse x , su cui è misurata l'unità di

lunghezza \overline{OP} del sistema S , in un punto R interno alla striscia, \overline{OR} risulta minore di 1.

In accordo con quanto stabilito dalla teoria della relatività, la contrazione è quindi reciproca, e si può valutarla esattamente ricorrendo alla trasformazione di Lorentz [70].

Sia l_0 la lunghezza del regolo nel sistema di riferimento S' in cui è a riposo, e siano x'_1 e x'_2 i suoi estremi, per cui $x'_2 - x'_1 = l_0$; l_0 è chiamata *lunghezza statica* o *lunghezza propria* del regolo.

Se si osserva il regolo in S , si ottiene, utilizzando la prima relazione della [70a]:

$$x'_1 = \frac{x_1 - ct_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - ct_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

dove x_1, t_1 e x_2, t_2 sono le coordinate corrispondenti in S a x'_1 e x'_2 . Per misurare la lunghezza del regolo nel sistema di riferimento S , è necessario determinare le coordinate x_1, x_2 simultaneamente rispetto a S : ciò significa che dobbiamo porre $t_1 = t_2$. In tal modo, sottraendo le due equazioni, otteniamo

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

da cui, ponendo $x_2 - x_1 = l$

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad [74]$$

La [74] stabilisce che la lunghezza del regolo nel sistema S è contratta nel rapporto $\sqrt{1 - \beta^2}/1$, in pieno accordo con l'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz (p. 262).

Argomenti analoghi valgono pure per la misura di un intervallo di tempo in due sistemi diversi S ed S' .

Supponiamo che in ogni punto del sistema S siano situati orologi assolutamente identici, e quindi che ad ogni istante corrisponda una ben definita posizione delle lancette rispetto a S . La posizione $ct_1 = 0$ è rappresentata dai punti di universo dell'asse x , e la posizione

$ct_2 = 1$ dai punti di universo della retta passante per Q e parallela a x (fig. 120).

Supponiamo che un orologio, per cui $t'_1 = 0$ quando $t_1 = 0$, sia posto nell'origine del sistema S' , e chiediamoci quale posizione occupino le lancette di un orologio del sistema S che si trova nel punto in cui l'orologio in quiete in S' indica esattamente il tempo $ct'_2 = 1$.

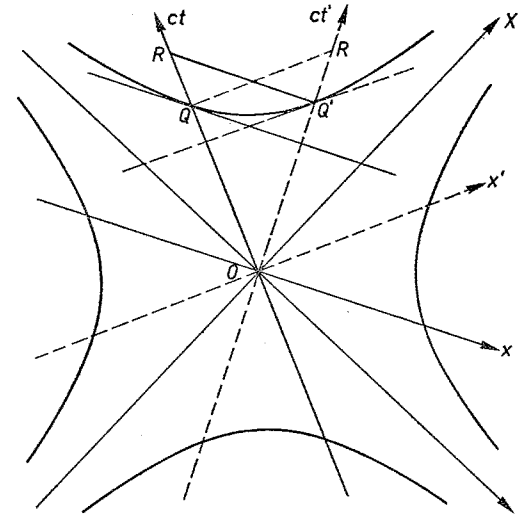


Fig. 120. Dilatazione del tempo.

Il valore cercato di ct_2 è determinato evidentemente dall'intersezione Q' dell'asse ct' con la curva $F = -1$. Il punto R in cui l'asse ct è incontrato dalla parallela per a' all'asse x è simultaneo al punto a' in S ; quindi \overline{OR} rappresenta ct_2 . Dalla figura 120 si vede che $\overline{OR} > \overline{OQ'}$, cioè ct_2 è maggiore di $ct_1 = 1$. Ciò significa che l'unità di tempo in S' appare dilatata se misurata nel sistema S .

Viceversa l'unità di tempo \overline{OQ} in S appare dilatata se misurata in S' ; infatti R' e a sono simultanei in S' e $\overline{OR'} > \overline{OQ'}$.

Una valutazione esatta di questo effetto può esser fatta consi-

derando un intervallo di tempo T_0 di cui t'_1 e t'_2 siano rispettivamente l'istante iniziale e finale misurati da un orologio in quiete nel sistema S' , $t'_2 - t'_1 = T_0$. Dalla seconda delle [70a] si ha

$$t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Misuriamo l'intervallo di tempo T_0 nel punto $x'_1 = x'_2$ in cui si trova l'orologio in S' . Poiché dalla prima delle [70a] si deduce $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$, se l'orologio ha velocità v in S , sottraendo t'_1 da t'_2 si ottiene

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{t_2 - t_1 - (v/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1 - (v^2/c^2)(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

La differenza $t_2 - t_1 = T$ misurata in S è quindi connessa all'intervallo T_0 misurato in S' dalla:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad [75]$$

La dilatazione del tempo è in rapporto inverso alla contrazione della lunghezza.

Naturalmente nel caso opposto dell'unità di tempo misurata da un orologio in quiete nel sistema S , si avrà una dilatazione temporale nel sistema S' .

Possiamo affermare cioè, che gli orologi di un sistema, in moto rispetto a un altro qualsiasi, quando sono osservati da quest'ultimo risultano in ritardo. La successione temporale degli eventi in sistemi in moto relativo è più lenta, cosicché tutti gli eventi di un sistema in moto sono in ritardo rispetto agli eventi corrispondenti del sistema che si suppone a riposo. In seguito ci soffermeremo sulle conseguenze che hanno origine da questo fatto e che spesso sono considerate paradossali.

Il tempo misurato da un orologio nel sistema di riferimento di

riposo è chiamato *tempo proprio* del sistema, e non è altro che il "tempo locale" di Lorentz. Il progresso costituito dalla teoria di Einstein non consiste tanto nella formulazione delle leggi quanto in un fondamentale mutamento nella loro considerazione. Nel pensiero di Lorentz il tempo locale appare come una quantità matematica ausiliaria in contrapposizione al tempo assoluto; Einstein invece afferma l'impossibilità di determinare questo tempo assoluto o di distinguerlo dall'infinità di tempi locali equivalenti relativi ai vari sistemi di riferimento in moto relativo. Ciò significa che il tempo assoluto non ha realtà fisica e che ogni dato temporale ha significato solo se riferito a un ben preciso sistema di riferimento; in questo senso va intesa la "relatività" del concetto di tempo.

5. Apparenza e realtà

Ci proponiamo ora di discutere, da un punto di vista epistemologico, le leggi della cinematica di Einstein, che ormai conosciamo sia nella loro formulazione analitica sia nella loro rappresentazione geometrica.

Si potrebbe pensare che la teoria di Einstein non compia alcun progresso sul piano della conoscenza dell'universo fisico, ma si esaurisca in una serie di definizioni suggerite dai fatti, e compatibili con essi, e tuttavia sostituibili da altre. Tale interpretazione sembrerebbe giustificata sulla base delle considerazioni svolte nell'esempio del rimorchiatore, che sono state il punto di partenza delle nostre successive discussioni, e dove la natura arbitraria e convenzionale della definizione di Einstein di simultaneità aveva colpito la nostra attenzione. È chiaro infatti che se facciamo uso di segnali sonori per regolare gli orologi, la cinematica di Einstein può essere applicata al moto di un battello attraverso l'aria in quiete, con la semplice convenzione che in ogni formula il simbolo c stia ad indicare la velocità del suono. Ogni battello in moto avrebbe così proprie unità di lunghezza e di tempo in base alla velocità, e i vari sistemi di riferimento sarebbero connessi fra loro dalle trasformazioni di Lorentz.

Ciò realizzerebbe in modo coerente una sorta di universo einsteiniano su piccola scala.

Tuttavia un tale universo sarebbe coerente soltanto se ammettessimo che le unità di lunghezza e di tempo debbano esser definite senz'altra condizione che la validità dei due principi di relatività e la costanza della velocità della luce e del suono. È questo il significato della teoria di Einstein?

Certamente no. La teoria assume come di per sé evidente il fatto che un regolo a riposo in due sistemi di riferimento S ed S' , nelle identiche condizioni fisiche, misuri sempre la stessa lunghezza (ammesso che non sia soggetto a forze esterne in nessuno dei due sistemi); un regolo di lunghezza 1 cm a riposo nel sistema S , dovrà naturalmente avere la stessa lunghezza anche se a riposo nel sistema S' , purché le altre condizioni fisiche (temperatura, campo gravitazionale, campo elettrico e magnetico) siano le stesse nei due sistemi. La stessa cosa vale anche nel caso degli orologi.

Questa assunzione è implicita nella teoria di Einstein, e potremmo chiamarla "principio dell'identità fisica delle unità di misura". Una volta compreso a fondo questo principio, possiamo renderci conto che applicare la cinematica di Einstein al caso delle navi e confrontare i tempi degli orologi con segnali sonori, è incompatibile con esso. Se, infatti, le unità di lunghezza e di tempo sono determinate, in base alla regola di Einstein, utilizzando la velocità del suono, non vi è alcuna ragione di ritenere che esse siano uguali alle unità di lunghezza e di tempo misurate con regoli e orologi identici; tali unità infatti, non solo sarebbero diverse per ogni nave a seconda della velocità, ma, limitatamente alle unità di lunghezza, varierebbero in funzione del loro orientamento rispetto alla direzione del moto. La cinematica di Einstein non sarebbe in questo caso neanche un'utile definizione, e ad essa sarebbe indubbiamente preferibile la comune conoscenza del comportamento di regoli e orologi come strumenti di misura. Proprio per questa ragione è difficile spiegare la cinematica di Einstein facendo uso di modelli; questi permettono certamente di ottenere relazioni fra lunghezze e tempi nei vari sistemi di

riferimento, ma sono incompatibili con il principio di identità delle unità di misura. Saremmo costretti allora a scegliere nei due sistemi S ed S' in moto relativo due differenti scale di lunghezze.

Secondo Einstein, le cose vanno in modo completamente diverso: la nuova cinematica è una valida descrizione della realtà fisica proprio quando per fissare le unità di lunghezza e di tempo, si usano lo stesso regolo e lo stesso orologio, prima nel sistema S , poi nel sistema S' . È per questo aspetto che la teoria di Einstein supera l'atteggiamento di una pura ipotesi convenzionale e afferma ben definite proprietà fisiche; ciò le conferisce un'importanza fondamentale nell'ambito di una visione generale della natura.

Illustriamo questo fatto con un esempio connesso al metodo di Römer per la misura della velocità della luce. Come sappiamo, l'intero sistema solare è in moto rispetto alle stelle fisse; supponiamo allora che esse definiscano un sistema di riferimento S , mentre S' sia solidale col sole e i suoi pianeti. Giove e i suoi satelliti costituiscono un orologio (idealmente perfetto); esso ruota in un'orbita circolare e ha quindi alternativamente una direzione parallela o opposta a quella del moto di S rispetto a S' . Non vi è allora alcuna esigenza di determinare lo scandire del tempo dato dall'orologio di Giove in modo tale che il tempo impiegato dalla luce a percorrere il diametro della terra sia lo stesso in tutte le direzioni, poiché ciò avviene per il modo stesso in cui tale orologio è costruito. Esso infatti misura soltanto il tempo proprio del sistema solare S' , e non un tempo assoluto o il tempo del sistema delle stelle fisse S . In altri termini, il tempo di rivoluzione dei satelliti di Giove è costante rispetto al sistema solare (sempre che si trascuri la velocità di Giove rispetto al sistema solare).

Secondo alcuni questo punto di vista rappresenta una *violazione della legge di causalità*. Essi ritengono infatti che debba esistere una causa che spieghi perché un regolo misurato in un sistema di riferimento S , ha una lunghezza differente secondo che sia in quiete o in moto rispetto ad esso; al contrario la teoria di Einstein non spiega l'ipotesi della contrazione ricorrendo a una causa agente, ma l'am-

mette come una conseguenza accidentale del moto. In realtà, questa obiezione non è giustificata, ed è dovuta soltanto a una visione troppo limitata del concetto di "variazione". Tale concetto infatti non sta ad indicare alcunché di assoluto, allo stesso modo che la misura di distanze o tempi ha solo un significato relativo. Se un corpo si muove uniformemente su una retta rispetto a un sistema inerziale S noi non diciamo che "subisce una variazione", anche se in realtà *varia la sua posizione* rispetto al sistema S . D'altra parte non è possibile definire a priori in fisica quali "variazioni" debbano essere considerate come il risultato di una certa causa incognita, poiché la soluzione di tale problema è proprio lo scopo della ricerca sperimentale.

Il punto di vista della teoria di Einstein sulla natura della contrazione è il seguente: un regolo non è un oggetto definito nello spazio, ma una configurazione spazio-temporale, e una sua rappresentazione geometrica (limitata a una sola dimensione spaziale) non è un segmento dell'asse x ma piuttosto una striscia del piano x, ct (fig. 121). Lo stesso regolo in quiete in diversi sistemi in moto S ed S' , è rappresentato da strisce differenti, e non esiste alcuna regola a priori sul modo in cui queste configurazioni bidimensionali del piano x, ct debbano essere disegnate affinché rappresentino correttamente il comportamento fisico di un dato regolo a differenti velocità. Questo scopo può essere raggiunto solo fissando in partenza nel piano x, ct l'iperbole invariante. Nella teoria classica entrambe le strisce hanno la stessa larghezza, se questa è misurata parallelamente ad un asse x fissato; nella teoria di Einstein esse hanno la stessa larghezza, qualora questa sia misurata per ogni regolo nella direzione x del sistema di riferimento in cui è a riposo. La "contrazione" non è subita dalla striscia ma piuttosto dalla sezione che essa taglia sull'asse x ; tuttavia, soltanto la striscia intesa come continuo di punti di universo (eventi) ha realtà fisica, e non tale sezione. Così la contrazione è soltanto una conseguenza del nostro modo di osservare le cose, non una variazione della realtà fisica; in questo senso essa non ha alcun rapporto con i concetti di causa e di effetto.

Il punto di vista ora esposto elimina la nota controversia se la contrazione debba esser considerata "reale" o soltanto "apparente". Se tagliamo a fette un cetriolo, le fette più larghe saranno quelle ottenute da un taglio più obliquo, e non ha senso dire che le dimensioni delle varie fette oblique sono "apparenti" mentre, ad esempio,

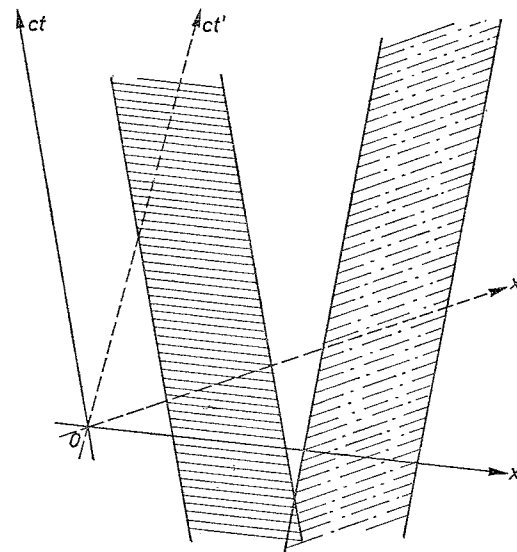


Fig. 121. Linee di universo di due regoli in moto relativo. Ogni regolo è rappresentato da una striscia limitata da linee di universo parallele, rispettivamente, agli assi t e t' . I tratti paralleli all'interno delle strisce rappresentano i regoli, nei loro sistemi di riposo, a tempi diversi.

le più piccole, ottenute con un taglio perpendicolare all'asse, hanno dimensione "reale".

Allo stesso modo, nella teoria di Einstein un regolo ha lunghezze differenti in relazione al punto di vista dell'osservatore. Una di queste lunghezze, la lunghezza statica o lunghezza propria, è la più grande, ma non per questo è più reale delle altre. Fare una distinzione fra "apparente" e "reale" in questo senso troppo semplifica-

tivo, non è più ragionevole che chiedere quale sia la coordinata x reale di un punto x, y , quando non è noto il sistema di coordinate considerato.

Analoghe considerazioni valgono se ci riferiamo al tempo: un orologio ideale mantiene sempre lo stesso ritmo di battiti nel suo sistema di riposo, e misura il "tempo proprio" del sistema. Tuttavia, quando è osservato da un diverso riferimento, esso va più lentamente, e un intervallo definito del tempo proprio appare dilatato. Anche in questo caso non avrebbe senso chiedersi quale sia la durata "reale" di un evento.

Una volta compresa nel suo esatto significato, la cinematica di Einstein non contiene né oscurità né incoerenze anche se molti suoi risultati sembrano in contrasto col modo di pensare comune e con la fisica classica. Tali contraddizioni sono state spesso giudicate degli assurdi paradossi, e più avanti vedremo come numerose conseguenze della teoria di Einstein, violentemente osteggiate al loro apparire, siano state accettate soltanto dopo precise conferme sperimentali. Uno degli esempi più sorprendenti a questo proposito è il cosiddetto "paradosso degli orologi", che, sebbene trattato in modo soddisfacente da Einstein quasi mezzo secolo fa, è ancora oggi fonte di vivaci discussioni.

Consideriamo un osservatore A in quiete nell'origine O di un sistema inerziale S , e un secondo osservatore B che parta da una posizione di riposo nello stesso punto O e si muova con velocità uniforme lungo una retta, ad esempio l'asse x , fino ad un punto C ; successivamente, B ritorni in O sempre lungo l'asse x e con la stessa velocità.

Entrambi gli osservatori misurino il loro tempo proprio con orologi ideali, e supponiamo inoltre che il tempo perso da B all'atto della partenza, nel tornare indietro e nel rallentare al suo arrivo in O , possa essere considerato arbitrariamente piccolo rispetto al tempo necessario per il moto di andata e ritorno, che può essere scelto sufficientemente grande. Supponiamo cioè che le variazioni subite dagli orologi per effetto dell'accelerazione siano trascurabili rispetto alla

lunga durata del percorso. In tal caso, al ritorno di B in O , l'orologio di B deve essere in ritardo rispetto all'orologio di A . Abbiamo visto infatti (p. 297) che mentre B compie con velocità uniforme il percorso di andata e ritorno il tempo proprio è sempre minore del tempo relativo ad ogni altro sistema inerziale. Ciò è particolarmente evidente in una rappresentazione geometrica nel piano x, ct : nella figura 122 si sono scelti, per ragioni di convenienza, assi x, ct per-

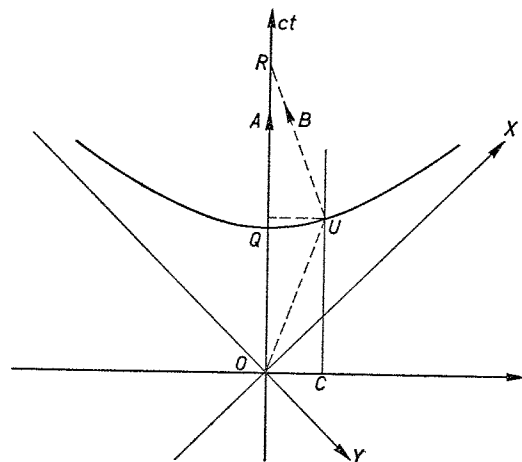


Fig. 122. Il paradosso degli orologi.

pendicolari fra loro. La linea di universo del punto A è l'asse ct , mentre la linea di universo del punto B è la spezzata \overline{OUR} (tratteggiata in figura) il cui vertice U giace sulla parallela a ct passante per C , che è il punto in cui avviene l'inversione del moto.

Disegniamo l'iperbole $F = x^2 - c^2t^2 = -c^2t_U^2$ passante per U , dove t_U è il tempo proprio di B in U , e sia Q il punto in cui essa incontra l'asse ct . È chiaro allora che il tempo proprio \overline{OQ} relativo all'osservatore A è esattamente uguale al tempo proprio \overline{OU} dell'osservatore B , poiché Q e U si trovano sulla medesima iperbole invariante. Ma la lunghezza del tempo proprio di A allorché si raggiunge il

punto R , è, come risulta dalla figura, più di due volte maggiore di \overline{OQ} , mentre è esattamente due volte \overline{OU} . Ne segue quindi che l'orologio di A è in anticipo rispetto a quello di B ; tale anticipo è facilmente calcolabile dalla [75], dove con T si intenda il tempo proprio di A e con T_0 il tempo misurato nel sistema B . Si ottiene allora la relazione

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

valida per ogni istante del moto, poiché il viaggio avviene nei due sensi con ugual velocità. Quindi vale in particolare anche per il momento in cui si inverte il moto, dove T indica il tempo impiegato per tutto il viaggio secondo il tempo proprio di A , e T_0 lo stesso tempo secondo il tempo proprio di B . Per $v \ll c$ la [75] diventa approssimativamente $T = T_0(1 + \frac{1}{2}(v^2/c^2))$ e l'anticipo dell'orologio di A rispetto all'orologio di B è

$$T - T_0 = \frac{v^2}{2c^2} \times T_0. \quad [76]$$

L'aspetto paradossale di questo risultato consiste nel fatto che ogni processo interno al sistema B deve avvenire più lentamente dello stesso processo nel sistema A . In questo senso, per esempio, ogni vibrazione atomica (ma anche il corso stesso della vita) deve subire un rallentamento; pertanto, se A e B fossero fratelli gemelli, al termine del viaggio B dovrebbe essere più giovane di A . Si tratta effettivamente di una conseguenza singolare, alla quale comunque non si può sfuggire in alcun modo; una simile idea va accettata con lo stesso spirito con cui, alcuni secoli fa, si accettò l'idea che per i nostri simili agli antipodi le espressioni "sopra" e "sotto" dovessero avere un significato opposto al nostro. Com'è evidente dalla [76], l'effetto di cui ci stiamo occupando è del secondo ordine in β , e può quindi essere messo in evidenza soltanto per velocità molto elevate; ma le velocità attualmente ottenibili con razzi o simili sono troppo piccole, e questo effetto può essere osservato in pratica solo studiando

il comportamento di piccole particelle dotate di velocità prossime a quella della luce c .

Ciò nonostante, cercheremo di comprendere il significato dell'equazione [75] considerando un viaggio immaginario verso le stelle. Facciamo riferimento alla figura 122 e supponiamo che l'asse ct sia la linea di universo della terra e \overline{CUR} la linea di universo della stella; \overline{OC} è quindi la distanza l fra terra e stella misurata sulla terra. L'intera distanza $2l$ del viaggio è uguale a vT . Riscriviamo la [75] nella forma

$$T_0 = \frac{2l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2 \frac{l}{c} \times \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dove T_0 rappresenta il tempo che il viaggiatore trascorre sulla sua astronave, e $l/c = T_l$ la distanza della stella misurata dal tempo che la luce impiega a percorrere la distanza l . Poiché, com'è noto, anche le stelle fisse più vicine a noi, distano dalla terra alcuni anni-luce, è ovvio che la luce debba impiegare qualche anno per viaggiare dalla stella alla terra.

Supponiamo allora, che sia intrapreso un viaggio verso una stella lontana a bordo di un razzo con velocità v ; il tempo proprio trascorso dal passeggero nel razzo durante il viaggio fino alla stella e ritorno sarà

$$T_0 = 2T_l \times \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad [75a]$$

mentre il corrispondente tempo misurato sulla terra vale

$$T = 2T_l \times \frac{c}{v}. \quad [75b]$$

Una grande stella fissa relativamente vicina è l' α del Centauro che si trova a una distanza di circa 4,5 anni luce, mentre una delle stelle più brillanti, Sirio, è ad una distanza di 9 anni luce. Per illustrare la [75a], immaginiamo un viaggio fino all' α del Centauro; allora $2T_l = 9$ anni. Nel grafico di figura 123 abbiamo disegnato T_0

in funzione di v/c , con un valore $2T_l=9$ anni; si osserva che in corrispondenza a una velocità $v=c \times 0,67$, per esempio, T_0 vale 10 anni (20 anni per $v=c \times 0,41$), mentre il tempo corrispondente sulla terra, T , sarebbe secondo la [75b] 13,5 anni (22 anni, nel caso di un viaggio che duri 20 anni).

Nella figura 124 abbiamo invece disegnato T_l in funzione di v/c , per $T_0=10$ anni; il grafico fornisce la distanza T_l che può essere percorsa in 10 anni con una velocità v arbitraria. Si osserva, per esempio, che per $v=c \times 0,9$, si può raggiungere una stella distante 10 anni luce, e che la velocità necessaria per raggiungere in non più di 10 anni l' α del Centauro deve essere almeno $0,67 c$.

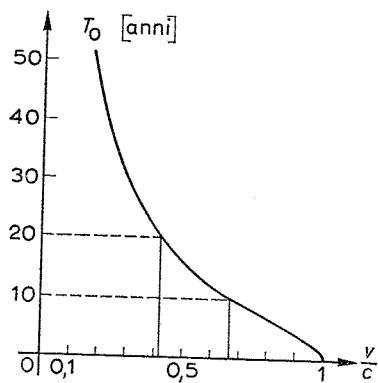


Fig. 123. Grafico del tempo proprio T_0 di un viaggiatore diretto alla stella α del Centauro (distante 4,5 anni luce), in funzione di v/c .

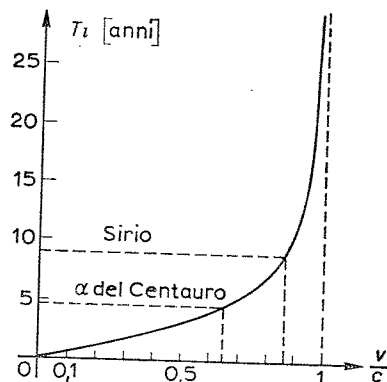


Fig. 124. Il grafico rappresenta in funzione di v/c la distanza T_l (in anni luce) misurata da un osservatore terrestre, relativa al caso di un viaggiatore spaziale con tempo proprio $T_0 = 10$ anni.

Ricordiamo che il risultato espresso dalla [75] può essere ottenuto in un secondo modo, se si tiene presente la contrazione di Lorentz che la distanza l subisce quando è misurata dal passeggero del razzo. In base alla [74] tale distanza sarà $l \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$ dove v

è la velocità della stella rispetto al razzo. Il tempo necessario a percorrere l sarà quindi dato dalla

$$\frac{T_0}{2} = \frac{l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

che è nuovamente la [75a].

Come abbiamo già detto, questi esperimenti nello spazio non possono essere ancora realizzati. Ma lo studio di particolari fenomeni dovuti a piccole particelle cosmiche, ha condotto a una conferma perfettamente convincente della dilatazione del tempo e dell'effetto descritto nel paradosso degli orologi. È noto da esperienze svolte negli ultimi cinquant'anni, che i raggi cosmici, costituiti di particelle veloci provenienti dallo spazio, sono formati principalmente da protoni (cioè nuclei di idrogeno), ma anche da nuclei di altri atomi. Penetrando nell'atmosfera terrestre da tutte le direzioni, essi entrano in collisione con le particelle presenti nell'aria. L'effetto principale degli urti contro i nuclei dell'ossigeno o dell'azoto atmosferici è la creazione di nuove particelle, i mesoni, di massa intermedia fra quelle del protone e dell'elettrone. Questi mesoni primari, chiamati mesoni π , sono instabili e decadono dopo un tempo piuttosto piccolo in altri mesoni più leggeri, in elettroni e altre particelle. I mesoni π possono anche essere prodotti in laboratorio per mezzo delle grandi e moderne macchine acceleratrici (ad esempio il ciclotrone); i mesoni così prodotti sono relativamente lenti e la loro vita media è praticamente la stessa che avrebbero se fossero a riposo, cioè $T_0 = 10^{-8}$ s. Anche ammesso allora che la loro velocità sia uguale a quella della luce, essi potrebbero percorrere una distanza di soli $cT_0 = 3 \times 10^{10} \times 10^{-8} = 300$ cm, e non sapremmo spiegarci come mai mesoni π di altissima energia sono osservati al livello del mare. In altre parole, com'è possibile che essi penetrino nell'atmosfera e compiano un percorso $h = 30$ km $= 3 \times 10^6$ cm prima di decadere? Il paradosso si risolve tenendo conto della dilatazione del tempo, per cui la vita media T osservata sulla terra è molto maggiore di T_0 ; si ha infatti $T = T_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Perché i mesoni raggiungano la super-

ficie terrestre, questo tempo deve essere maggiore del rapporto fra l'altezza dell'atmosfera h e la velocità v ; la velocità minima si ottiene perciò dalla condizione

$$\frac{T_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h}{v},$$

cioè

$$\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h}{T_0 c} = \frac{3 \times 10^6 \text{ cm}}{10^{-8} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm}} = 10^4.$$

Si ricava quindi

$$v = c(1 - \frac{1}{2} 10^{-8}) = 0,99999995c$$

che è una velocità abbastanza comune nel caso dei raggi cosmici.

Questo esempio rappresenta così un'illustrazione del paradosso degli orologi; ogni mesone ha un suo tempo proprio di decadimento T_0 , ma la vita media T osservata dalla terra è molto più grande. Anche in questo caso, le cose possono esser viste in modo differente, e il paradosso può esser risolto pensando che per il mesone in moto la distanza che lo separa dalla terra risulti contratta, e quindi esso sia in grado di compiere percorsi molto elevati in proporzione alla sua velocità.

Simili risultati non sono paradossali, e la ragione principale della nostra incredulità è dovuta esclusivamente al loro carattere insolito e alla scarsa abitudine a ragionare in questi termini.

Vi sono però oppositori della teoria della relatività che partendo da queste conclusioni criticano la compatibilità logica della teoria. Il loro argomento è il seguente: poiché secondo la teoria della relatività due sistemi in moto relativo sono equivalenti fra loro, possiamo sempre supporre che B sia a riposo e A compia un viaggio identico a quello precedentemente compiuto da B , ma in direzione opposta. In tal caso, al ritorno di A , l'orologio di B dovrà essere in anticipo rispetto ad A . Dobbiamo concludere allora che, poiché in precedenza eravamo giunti alla conclusione opposta e ovviamente l'orologio di A non può essere contemporaneamente in anticipo e in

ritardo su quello di B , esiste un'evidente contraddizione della teoria. Si tratta, come vedremo immediatamente, di un ragionamento superficiale e palesemente errato; il principio di relatività concerne *soltanto* sistemi di riferimento in moto rettilineo e uniforme fra loro e, almeno nella forma in cui l'abbiamo sviluppato finora, *non* può essere applicato al caso di sistemi accelerati. Nell'argomento precedente invece, B subiva un'accelerazione e non poteva essere considerato quindi equivalente ad A ; in altri termini, mentre A è un sistema inerziale, B non lo è. In seguito vedremo come la teoria della relatività generale di Einstein estenda il criterio di equivalenza al caso di sistemi accelerati, in un senso, però, che richiede una discussione più accurata. Allora, riprendendo in considerazione da un punto di vista più generale il paradosso degli orologi, mostreremo come sulla base di un esame rigoroso esso non presenti alcuna difficoltà. Ricordiamo, infatti, che nelle considerazioni precedenti abbiamo fatto l'ipotesi che per viaggi sufficientemente lunghi, i brevi periodi di accelerazione non esercitassero alcuna influenza sugli orologi. Tale ipotesi è giustificata *soltanto* per misure di tempo eseguite rispetto al sistema inerziale A , e non rispetto al sistema accelerato B . Infatti, secondo i principi della relatività generale, il sistema B è sede di campi gravitazionali che influenzano gli orologi. Tenendo conto di questo fatto, dimostreremo che in ogni caso l'orologio di A è in anticipo rispetto a B , e che non esiste quindi contraddizione (vedi p. 414).

La difficoltà nell'accettare il carattere relativo dei concetti di lunghezza e di tempo è probabilmente dovuta solo al fatto che tale aspetto ci è del tutto inconsueto. Come abbiamo più volte ricordato, ciò ha un'analogia con quanto dovette avvenire nei confronti dei concetti "sopra" e "sotto" in seguito alla scoperta della forma sferica della terra; anche in quel caso, infatti, il risultato di una ricerca contraddiceva un punto di vista basato sull'esperienza diretta.

Allo stesso modo, il carattere relativo del tempo einsteiniano, sembra incompatibile con ciò che ognuno di noi "sente" come tempo. Il fatto che istanti "simultanei" per un individuo, siano "consecutivi" per un altro, esula dalla concezione comune del tempo. La scienza

ha però differenti criteri di verità; poiché la "simultaneità" assoluta non può essere verificata, essa deve rimuovere tale concetto dall'ambiente delle sue leggi.

6. Il teorema di addizione per le velocità

Esamineremo ora più a fondo le leggi della cinematica di Einstein. A questo fine, ci limiteremo principalmente a considerare il piano x, ct . La generalizzazione dei teoremi ottenuti al caso di uno spazio quadridimensionale x, y, z, t , non presenta particolari difficoltà, e quindi ci soffermeremo appena sull'argomento.

Le linee di luce, che sono caratterizzate dall'equazione $F = x^2 - c^2t^2 = 0$, dividono il piano x, ct in quattro quadranti (fig. 116). Evidentemente F assume gli stessi valori in ogni quadrante, in quanto $F > 0$ nei due quadranti opposti che contengono i rami delle iperboli $F = +1$, e $F < 0$ nei due quadranti opposti che contengono i rami delle iperboli $F = -1$. Una linea d'universo rettilinea che passi per l'origine O , può essere scelta come asse x o asse ct a seconda che essa si trovi nel quadrante $F > 0$ o $F < 0$. Conformemente a ciò distingueremo le linee d'universo in linee di "tipo spazio" o di "tipo tempo" (fig. 125).

In ogni sistema inerziale l'asse x divide i punti d'universo del "passato" ($t < 0$) da quelli del "futuro" ($t > 0$). Ma questa separazione è diversa per ogni sistema inerziale, poiché per un'altra posizione dell'asse x i punti d'universo che in precedenza giacevano sopra l'asse x , cioè nel futuro, ora si trovano sotto l'asse x , cioè nel passato, e viceversa. Soltanto gli eventi rappresentati dai punti d'universo compresi nei quadranti $F < 0$ sono unicamente eventi "passati" o "futuri" per ogni sistema inerziale. Per un punto d'universo P di questo tipo (fig. 125a) abbiamo $c^2t^2 > x^2$, cioè in ogni sistema di riferimento possibile la distanza temporale dei due eventi O e P è maggiore del tempo impiegato dalla luce nel passare da un punto all'altro. Possiamo sempre introdurre allora un sistema inerziale S tale che il suo asse ct passi per P , cioè in cui P rappresenti un evento che av-

venga nell'origine spaziale. Rispetto a un altro sistema inerziale, il sistema S si muoverà di moto rettilineo e uniforme in modo tale che la sua origine coincida esattamente con gli eventi O e P . È ovvio allora che dobbiamo avere per l'evento P nel sistema S , $x = 0$, cioè

$$F = -c^2t^2 < 0.$$

In ogni sistema inerziale l'asse ct rappresenta i punti d'universo relativi a eventi che si verificano nell'origine spaziale sull'asse x ,

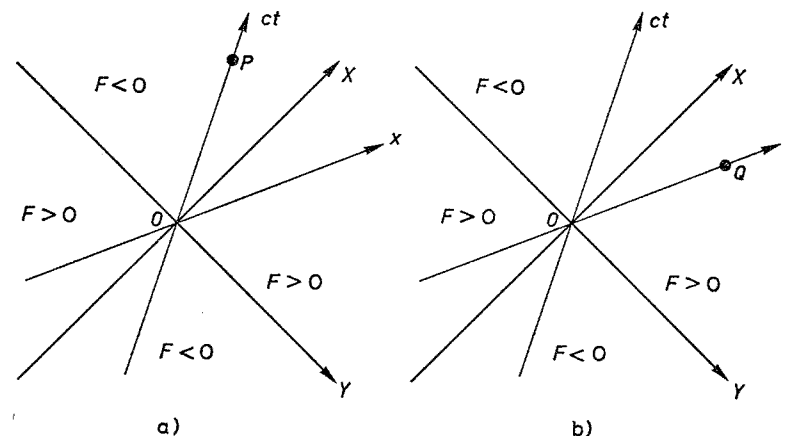


Fig. 125. a) Distanza di tipo tempo \overline{OP} .
b) Distanza di tipo spazio \overline{OQ} .

e divide (in una configurazione bidimensionale) i punti a sinistra dell'origine da quelli che si trovano a destra. Per un sistema inerziale diverso con un diverso asse ct , questa delimitazione cambierà. Essa è determinata univocamente soltanto per i punti d'universo compresi nei quadranti $F > 0$, sia che essi si trovino "davanti", o "dietro" l'origine spaziale. Per un punto Q di questo tipo (fig. 125b) si ha $c^2t^2 < x^2$, cioè in ogni sistema di riferimento possibile l'intervallo di tempo tra due eventi O e Q è minore del tempo che la luce

impiega nel passare dall'uno all'altro. Possiamo allora introdurre un appropriato sistema inerziale S in moto, il cui asse x passi per Q , e nel quale entrambi gli eventi O e Q siano simultanei. In questo sistema si ha evidentemente per l'evento Q , $t=0$, e perciò $F=x^2 > 0$.

Da ciò segue che l'invariante F , per ogni punto d'universo P , è una quantità misurabile di cui possiamo mettere in evidenza il significato. Introducendo un opportuno sistema di riferimento S , il punto d'universo P può essere trasformato o "nella stessa posizione" di O , nel qual caso $F = -c^2 t^2$ (dove t denota la differenza di tempo dell'evento P rispetto all'evento O che si verifica nello stesso punto del sistema S), oppure può essere trasformato "nello stesso tempo" di O , e allora $F = x^2$ (dove x è la distanza spaziale tra i due eventi che avvengono nel sistema S).

In ogni sistema di coordinate le linee di luce $F=0$ rappresentano moti che si attuano con la velocità della luce. Di conseguenza, ogni linea d'universo di tipo tempo rappresenta un moto la cui velocità è minore di c . Oppure, da un altro punto di vista, ogni moto che avviene con una velocità minore di quella della luce può essere "trasformato in quiete" perché c'è una linea d'universo di tipo tempo che corrisponde ad esso.

Ma che cosa possiamo dire a proposito di moti con velocità più grandi di quella della luce? In base alla discussione precedente, dalla teoria della relatività di Einstein discende che tali moti non sono possibili. Infatti la nuova cinematica perderebbe ogni significato se esistessero segnali tali da permetterci di verificare la simultaneità di orologi ricorrendo a una velocità maggiore di quella della luce. A questo punto sembra sorgere tuttavia una difficoltà.

Supponiamo che un certo sistema S' si muova con velocità v rispetto a un altro sistema S , e che un corpo K si muova rispetto ad S' con velocità u' . Secondo la cinematica ordinaria, la velocità relativa del corpo K rispetto ad S è data da

$$u = v + u'.$$

Se ora sia v che u' sono più grandi della metà della velocità della

luce, allora $u = v + u'$ risulta maggiore di c , e questo è impossibile in base alla teoria della relatività.

Tale contraddizione è naturalmente dovuta alla circostanza che nella cinematica relativistica, dove ogni sistema di riferimento ha la sua propria unità di lunghezza e di tempo, le velocità non possono essere semplicemente sommate.

La necessità di tener conto di questa circostanza deriva ovviamente dal fatto che nei due sistemi in moto relativo si suppone che la velocità della luce abbia sempre lo stesso valore, ipotesi di cui abbiamo già fatto uso in precedenza nel derivare la trasformazione di Lorentz (p. 284). La legge effettiva per la composizione delle velocità può essere derivata da questa trasformazione (formula [70]). Consideriamo un corpo in moto nel sistema S' .

Esso può muoversi nel piano x', y' e avere così due componenti di velocità $u_{x'}$ e $u_{y'}$, e può partire dall'origine al tempo $t'=0$. La sua linea d'universo è data dalle equazioni:

$$x' = u_{x'} t', \quad [\alpha]$$

$$y' = u_{y'} t'. \quad [\beta]$$

Ci si può aspettare che lo stesso moto sarà rettilineo anche in S , con componenti di velocità costanti u_x, u_y . La corrispondente linea d'universo in S è data da:

$$x = u_x t \quad [\gamma]$$

$$y = u_y t. \quad [\delta]$$

Al fine di ottenere una relazione tra le velocità nei due sistemi S ed S' , introduciamo x, y, t nelle equazioni $[\alpha]$ e $[\beta]$ mediante la trasformazione di Lorentz [70a]. Considerando prima l'equazione $[\alpha]$, si ottiene:

$$(x - vt) = u_{x'} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad \text{oppure} \quad \left(1 + \frac{u_{x'} v}{c^2} \right) x = (u_{x'} + v)t$$

e, confrontando con $[\gamma]$:

$$u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + (u_{x'}v)/c^2}. \quad [77a]$$

Si ha analogamente da $[\beta]$:

$$u_y = \frac{u_{y'}(1 - (v/c^2)u_{x'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

da cui, utilizzando la [77a]:

$$u_y = u_{y'} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (u_{x'}v)/c^2}. \quad [77b]$$

Le equazioni [77a, b] esprimono il *teorema di addizione per le velocità* di Einstein, che sostituisce le semplici formule della vecchia cinematica:

$$u_x = u_{x'} + v, \quad u_y = u_{y'}.$$

Volendo esprimere $u_{x'}$, $u_{y'}$ in termini di u_x , u_y si ottengono formule della stessa struttura, con la sola differenza che al posto di v figura ora $-v$. Ciò segue dall'equivalenza dei sistemi di riferimento e può anche essere verificato matematicamente.

Se consideriamo in particolare un raggio di luce che viaggia nella direzione di moto del sistema S' rispetto a S , si ha $u_{x'} = c$, $u_{y'} = 0$. Dalla formula [77], come ci si poteva aspettare, si ottiene allora il risultato:

$$u_x = \frac{v + c}{1 + v/c} = c, \quad u_y = 0,$$

che esprime il teorema della costanza della velocità della luce. Si vede inoltre che per ogni corpo che si muove in direzione longitudinale si ha $u_x < c$ quando $u_{x'} < c$ e $v < c$. Dividendo infatti la [77a] per c , si ottiene:

$$\frac{u_x}{c} = 1 - \frac{(1 - u_{x'}/c)(1 - v/c)}{1 + (u_{x'}v)/c^2}.$$

Questa formula esprime quanto abbiamo precedentemente affermato,

poiché dalle condizioni summenzionate deriva che il secondo termine del secondo membro è sempre minore di 1 (il denominatore è maggiore di 1 mentre i due fattori al numeratore sono più piccoli dell'unità). Un analogo risultato vale naturalmente nel caso di un moto trasversale, e nel caso di moti aventi una direzione qualsiasi.

Quindi la velocità della luce, da un punto di vista cinematico, è una velocità limite che non può essere superata. Tale asserto della teoria di Einstein incontrò molte opposizioni. Esso poteva sembrare una limitazione ingiustificabile per eventuali ricercatori che si fossero predisposti a trovare moti con velocità maggiori di quella della luce.

Sappiamo che i raggi β di sostanze radioattive sono elettroni che si muovono con velocità prossime a quella della luce. Perché non potrebbe essere possibile accelerarli fino a far loro assumere una velocità superiore a quella della luce?

Tuttavia la teoria di Einstein afferma che questo non è possibile, perché la resistenza inerziale o la massa di un corpo aumenta con una velocità che si avvicina a quella della luce. Si arriva così alla nuova dinamica costruita sulla base della cinematica di Einstein.

7. La dinamica di Einstein

La meccanica di Galileo e di Newton è strettamente legata alla vecchia cinematica. Il principio di relatività classica, in particolare, dipende dal fatto che le variazioni di velocità, cioè le accelerazioni, sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo.

È chiaro d'altra parte che non è possibile ritenere che per alcuni fenomeni fisici sia valida una cinematica, e per altri ne valga una seconda; in particolare cioè, che la meccanica sia invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo e l'elettrodinamica rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

È noto tuttavia che le trasformazioni di Galileo sono un caso limite di quelle di Lorentz, ottenibili per c tendente all'infinito. Di conseguenza, seguendo Einstein, noi assumeremo che la mec-

canica classica non sia valida in assoluto, ma debba essere modificata in modo che le nuove leggi siano invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Esse possono essere ricavate stabilendo quali leggi fondamentali della meccanica classica devono essere conservate, e quali modificate o abolite del tutto. La dinamica galileiana è interamente costruita a partire dalla fondamentale *legge della quantità di moto*. A pagina 52 abbiamo definito la quantità di moto come;

$$p = mv.$$

La variazione di quantità di moto è mw , dove w è la variazione di velocità. È ovvio che alla luce delle leggi di Einstein, questa espressione va ora modificata, poiché, mentre in meccanica classica la variazione di velocità w ha sempre lo stesso valore in ogni sistema inerziale (vedi p. 92), il teorema di addizione delle velocità [77] ci avverte che questa condizione non è ora più valida. La [7] è quindi priva di significato, a meno che non si definisca la legge di trasformazione della quantità di moto al passaggio da un sistema di riferimento a un altro, ma ciò non si presta a una comoda generalizzazione.

È certamente lecito invece partire dalla *legge di conservazione della quantità di moto* (p. 53, formula [9]): essa stabilisce che in un processo d'urto la quantità di moto totale di due corpi non cambia, quale che sia la variazione delle loro velocità. Per il modo stesso in cui è formulata, questa legge mantiene la sua validità nell'ambito della nuova dinamica; essa concerne infatti solo azioni reciproche che si esercitano fra due corpi, senza influenze esterne e quindi senza che vi sia un riferimento ad una terza massa o ad un sistema di coordinate. Secondo ciò accettiamo che questa legge di conservazione rimanga valida nella nuova dinamica.

Anche in questo caso però, come vedremo fra un istante, sorgerebbero insormontabili difficoltà se continuassimo ad accettare l'assioma della meccanica classica secondo cui la massa è una costante caratteristica di ogni corpo. Assumeremo quindi, innanzitutto,

che *la massa di un dato corpo è una grandezza relativa*, il cui valore dipende dal sistema di riferimento in cui è misurata, o, una volta che questo sia fissato, dalla velocità del corpo in movimento. È chiaro che la massa rispetto ad un dato sistema di riferimento può dipendere solo dalla velocità del moto del corpo rispetto al sistema e non dalla sua direzione.

Per studiare la dipendenza della massa m di un corpo dalla sua velocità u , scegliamo un esempio piuttosto particolare, una collisione "anelastica" tra due corpi ("anelastico" sta qui ad indicare il fatto che i due corpi penetrano uno nell'altro dopo l'urto, deformandosi). Una collisione di questo tipo si ha, per esempio, sparando con una pistola una pallottola m_1 contro un blocco di legno m_2 ; dopo l'urto pallottola e blocco di legno restano uniti, e si muovono con velocità identica (fig. 126a).

Discutiamo dapprima il problema nell'ambito della meccanica newtoniana usando la legge di conservazione della quantità di moto; siano rispettivamente u e $zero$ i valori delle velocità di m_1 ed m_2 prima dell'urto, e \bar{u} la velocità comune dei due corpi dopo l'urto. Le quantità di moto totali sono allora:

$$\begin{array}{ll} \text{prima dell'urto} & m_1 u \\ \text{dopo l'urto} & M \bar{u} = (m_1 + m_2) \bar{u}. \end{array}$$

La legge di conservazione della quantità di moto impone quindi che

$$m_1 u = M \bar{u}.$$

Questa equazione, che permette di calcolare la velocità u del proiettile nota la velocità \bar{u} dopo la collisione, suggerisce un metodo effettivamente usato (prima dello sviluppo di tecniche fotografiche per alte velocità, o altri metodi moderni) per determinare la velocità di una pallottola; è chiaro infatti che quando m_2 è molto maggiore di m_1 , la velocità \bar{u} risulta molto più piccola di u e può essere misurata con relativa facilità.

Supponiamo per semplicità che $m_1 = m_2 = m$, e quindi $\bar{u} = u/2$, e ricordiamo che in un processo di questo tipo, non vi è conservazione

dell'energia meccanica; la differenza fra l'energia cinetica

$$\text{prima dell'urto } \frac{m}{2}u^2,$$

e

$$\text{dopo l'urto } \frac{2m}{2}\bar{u}^2 = \frac{m}{4}u^2,$$

cioè $mu^2/2 - mu^2/4 = mu^2/4$, si trasforma infatti in calore.

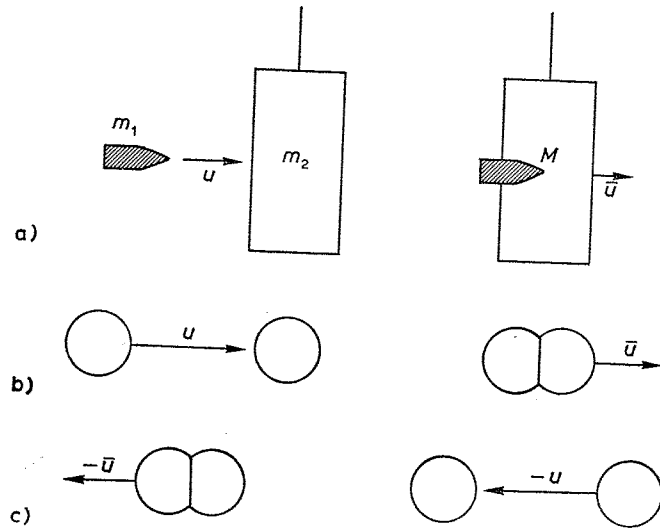


Fig. 126. a) Un blocco di legno di massa m_2 è sospeso nella sua posizione di equilibrio a un lungo filo, come un pendolo. Una pallottola di pistola di massa m_1 viene sparata con grande velocità u contro m_2 e si conficca nel legno. Le due masse acquistano così una velocità comune \bar{u} tanto più piccola di u quanto più m_2 supera m_1 ; essa può essere facilmente misurata osservando le oscillazioni del pendolo.

b) Collisione di due sfere uguali, che penetrano l'una nell'altra dopo l'urto. La sfera proveniente da sinistra ha velocità u , mentre \bar{u} è la velocità comune dopo l'urto.

c) La stessa collisione della figura 126b osservata da un sistema S' in moto con velocità u , identica a quella che nella figura precedente ha la sfera di sinistra. Qui, la sfera di destra si muove con velocità $-u$, quella di sinistra è a riposo, e la velocità dopo l'urto è $-\bar{u}$.

Fin qui la trattazione del problema segue le leggi della meccanica classica.

Consideriamo ora un processo del tutto analogo in meccanica relativistica (fig. 126b), sempre nell'ipotesi che le masse siano uguali; poiché in questo caso vi è una dipendenza della massa dalla velocità, la legge di conservazione della quantità di moto sarà:

$$m(u)u = M(\bar{u})\bar{u}. \quad [\alpha]$$

Tale equazione si intende riferita a un sistema S in cui la sfera di sinistra è in moto con velocità u e quella di destra è a riposo; vogliamo far notare inoltre che si è usata l'espressione generica $M(\bar{u})$ per la massa del sistema dopo la collisione, poiché non è possibile affermare a priori che $M(\bar{u})$ sia esattamente $2m(\bar{u})$ (che ciò non si verifichi è proprio quanto dimostreremo più avanti).

Ricaviamo ora una relazione tra u e \bar{u} . L'equazione precedente si riferisce ad un sistema S (fig. 126b) in cui la sfera a sinistra si muove con velocità u e la sfera a destra è in quiete. Lo stesso processo può però essere osservato da un altro sistema S' , in moto rispetto a S con velocità $+u$, nel quale la sfera a sinistra sia in quiete e la sfera a destra si muova con velocità $-u$. Poiché, com'è evidente dalla figura 126c, i due processi in S ed S' sono simmetrici, possiamo concludere che la velocità comune dopo l'urto deve essere $-\bar{u}$. Dalla [77a], ponendo $v=+u$, $u_x=\bar{u}$, $u'_x=-\bar{u}$, si ottiene allora

$$\bar{u} = \frac{-\bar{u} + u}{1 - (u\bar{u})/c^2},$$

che risolta rispetto ad u conduce alla

$$u = \frac{2\bar{u}}{1 + (\bar{u}/c)^2}. \quad [\beta]$$

Questa equazione dimostra che per $\bar{u}/c \rightarrow 0$, cioè nel caso limite della meccanica classica, $\bar{u} = u/2$, come si è già visto precedentemente.

Ci proponiamo ora di dimostrare la validità della seguente relazione

$$m(u) + m(0) = M(\bar{u}) \quad [\gamma]$$

alla quale possiamo dare il nome di legge di conservazione della massa; a questo scopo aggiungiamo una piccola velocità v perpendicolare a u oppure a \bar{u} , e applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto alla componente secondo l'asse y , v (fig. 127).

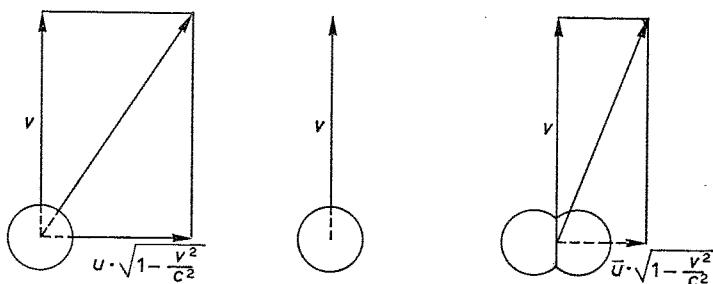


Fig. 127. Lo stesso processo della figura 126b, ma osservato da un sistema di riferimento in cui ogni sfera possiede anche una componente della velocità, v , perpendicolare ad u ed \bar{u} .

Introduciamo un sistema di riferimento S' in moto nella direzione y rispetto al sistema originale S con velocità v , e applichiamo le formule [77a] e [77b] dopo aver scambiato fra loro le direzioni x ed y :

$$u'_x = u_x \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + (u_y v/c^2)}, \quad u'_y = \frac{u_y + v}{1 + (u_y v/c^2)}.$$

Poiché nel sistema di riferimento S la velocità ha una componente diversa da zero solo in direzione x , sia nel caso delle due sfere in collisione sia per un sistema costituito dalle due sfere unite, sarà sempre $u_y = 0$ e le precedenti relazioni si ridurranno alle

$$u'_x = u_x \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad u'_y = v.$$

In corrispondenza ai seguenti valori delle componenti della velocità nel sistema S

	sfera di sinistra	sfera di destra	sistema formato dalle due sfere unite
u_x	u	0	\bar{u}
u_y	0	0	0

le componenti nel sistema S' saranno quindi

	sfera di sinistra	sfera di destra	sistema formato dalle due sfere unite
u'_x	$u \sqrt{1 - (v/c)^2}$	0	$\bar{u} \sqrt{1 - (v/c)^2}$
u'_y	v	v	v

Se allora teniamo presente che le masse dipendono soltanto dal valore assoluto della velocità, cioè da $\sqrt{u'^2_x + u'^2_y}$, la proiezione sull'asse y della legge di conservazione della quantità di moto sarà

$$m(u') \times v + m(v) \times v = M(\bar{u}') \times v,$$

dove per brevità abbiamo scritto in luogo di $\sqrt{u'^2_x + u'^2_y}$ nel caso della sfera di sinistra u' e nel caso del corpo composto \bar{u}' ; dividendo per v , si ottiene

$$m(u') + m(v) = M(\bar{u}'). \quad [\delta]$$

Dal momento che questa equazione deve essere valida per ogni valore di v , basta ora porre $v=0$ per ottenere la $[\gamma]$. Mentre l'equazione $[\delta]$ esprime nella forma più generale la legge di conservazione della massa per velocità arbitrarie, la $[\gamma]$ non è che un caso particolare, di cui si serviremo per ottenere la relazione esistente fra massa e velocità.

Riprendiamo ora l'equazione $[\alpha]$ e sostituiamo al posto di $M(\bar{u})$,

secondo la [γ], $m(u)+m(0)$; si ottiene quindi

$$m(u)u = [m(u) + m(0)]\bar{u}$$

oppure

$$m(u) = m(0) \frac{\bar{u}}{u - \bar{u}}$$

che, utilizzando [β], diventa * infine

$$m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad [78]$$

Questa relazione esprime la dipendenza della massa dalla velocità; $m(0)=m_0$ è chiamata *massa di riposo* del corpo, ed è la massa misurata nel sistema di riferimento in cui il corpo è in quiete. In meccanica classica ci siamo sempre limitati a considerare solo masse a riposo.

Per la [78] la quantità di moto di un corpo in moto con velocità v , sarà quindi

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot v, \quad [79]$$

cioè una funzione della velocità del corpo di massa m_0 .

* Il calcolo procede nel seguente modo: sostituendo u dall'equazione [β], si ha

$$\frac{\bar{u}}{u - \bar{u}} = \frac{\bar{u}}{2\bar{u}/[1 + (\bar{u}/c)^2] - \bar{u}} = \frac{1}{2/[1 + (\bar{u}/c)^2] - 1} = \frac{1 + (\bar{u}/c)^2}{2 - [1 + (\bar{u}/c)^2]} = \frac{1 + (\bar{u}/c)^2}{1 - (\bar{u}/c)^2}.$$

D'altra parte

$$[1 - (\bar{u}/c)^2]^2 = [1 + (\bar{u}/c)^2]^2 - 4(\bar{u}/c)^2,$$

quindi, sempre per la [β],

$$\left[\frac{1 - (\bar{u}/c)^2}{1 + (\bar{u}/c)^2} \right]^2 = 1 - \frac{4(\bar{u}/c)^2}{[1 + (\bar{u}/c)^2]^2} = 1 - (u/c)^2,$$

e combinando i due risultati

$$\frac{\bar{u}}{u - \bar{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Cerchiamo ora di ottenere la legge del moto di un corpo sottoposto all'azione di forze agenti con continuità, e serviamoci a tale scopo della formulazione classica (vedi p. 54) basata sul concetto di quantità di moto trasportata da un corpo in movimento. Tale formulazione rimane valida nell'ambito della nuova dinamica, purché si distinguano fra loro le componenti longitudinale e trasversale della quantità di moto; diremo allora che:

Una forza F produce una variazione delle componenti longitudinale e trasversale della quantità di moto, per unità di tempo, tale da uguagliare le corrispondenti componenti della forza.

Si possono ricavare facilmente le equazioni del moto. Siano $p_x(0)$ e $p_y(0)$ le componenti della quantità di moto di un corpo nell'istante $t=0$, e sia v la velocità nella direzione x allo stesso istante. Supponiamo inoltre che una forza di componenti F_x e F_y agisca per un breve intervallo di tempo τ ; le componenti del momento si trasformeranno così in $p_x(\tau)$ e $p_y(\tau)$. Valgono allora le seguenti espressioni matematiche

$$p_x(\tau) - p_x(0) = F_x \cdot \tau,$$

$$p_y(\tau) - p_y(0) = F_y \cdot \tau.$$

Possiamo ritenere che, a causa dell'azione della forza, piccole velocità w_x e w_y si sommino alle componenti di v (fig. 128); indicando

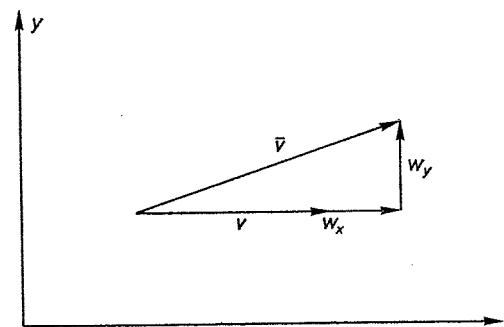


Fig. 128. Una velocità v nella direzione di x varia a causa di piccole componenti w_x e w_y . La velocità risultante è \bar{v} .

con \bar{v} la velocità risultante, le equazioni precedenti si scriveranno anche nella forma

nella direzione dell'asse x $m(\bar{v})(v + w_x) - m(v)v = F_x \cdot \tau$,

nella direzione dell'asse y $m(\bar{v})w_y = F_y \cdot \tau$.

Il valore assoluto di \bar{v} si calcola approssimativamente trascurando i quadrati di w_x e w_y , ottenendo

$$\bar{v} = \sqrt{(v + w_x)^2 + w_y^2} \cong v \sqrt{1 + 2w_x/v} \cong v \left(1 + \frac{w_x}{v}\right) = v + w_x;$$

dove si è fatto uso dell'approssimazione $\sqrt{1+2x} \cong 1+x$, valida per piccoli valori di x . Abbiamo così

$$m(\bar{v}) = m(v + w_x) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v + w_x)^2/c^2}}.$$

La radice quadrata a denominatore si scrive

$$\sqrt{1 - (v/c)^2(1 + w_x/v)^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2(1 + 2w_x/v + w_x^2/v^2)},$$

e quindi, trascurando w_x^2/c^2 e usando l'abbreviazione $\alpha^2 = 1 - (v/c)^2$,

$$\sqrt{\alpha^2 - (2vw_x)/c^2} = \alpha \sqrt{1 - (2vw_x)/(c^2\alpha^2)} = \alpha[1 - (vw_x)/(c^2\alpha^2)];$$

con la solita approssimazione $\sqrt{1-2x} \cong 1-x$. Poiché nella stessa approssimazione $1/(1-x) \cong 1+x$, si ottiene

$$\begin{aligned} m(\bar{v}) &= \frac{m_0}{\alpha[1 - (vw_x)/(c^2\alpha^2)]} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} [1 + (vw_x)/(c^2\alpha^2)] = \\ &= m(v)[1 + (vw_x)/(c^2\alpha^2)]. \quad [e] \end{aligned}$$

Questa espressione va sostituita nelle leggi di conservazione delle componenti della quantità di moto. Il primo membro dell'equazione relativa alla componente nella direzione x , diventa quindi

$$m(v)[1 + (vw_x)/(c^2\alpha^2)](v + w_x) - m(v)v = m(v)w_x[(v/\alpha c)^2 - 1] = \frac{m(v)}{1 - (v/c)^2} w_x,$$

e analogamente per la componente nella direzione y

$$m(v)[1 + (vw_x)/(c^2\alpha^2)]w_y = m(v)w_y,$$

dove sono stati sempre trascurati i termini di secondo grado w_x^2 e $w_x w_y$. Le relazioni che ci interessano sono allora

$$\frac{m(v)}{1 - (v/c)^2} w_x = \frac{m_0}{(\sqrt{1 - (v/c)^2})^3} w_x = F_x \tau,$$

$$m(v)w_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} w_y = F_y \tau.$$

Introducendo infine le componenti dell'accelerazione

$$a_x = \frac{w_x}{\tau} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{w_y}{\tau},$$

possiamo scrivere per le componenti della forza le seguenti due equazioni

$$F_x = \frac{m_0 a_x}{(\sqrt{1 - (v/c)^2})^3}, \quad F_y = \frac{m_0 a_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad [80]$$

La relazione esistente tra forza e accelerazione prodotta, è quindi differente secondo che la forza agisca nella direzione della velocità o in direzione perpendicolare ad essa.

Nei primi anni della teoria della relatività si era soliti porre l'equazione [80] in una forma per quanto possibile simile a quella della legge fondamentale della dinamica classica (formula [10], p. 54), introducendo i simboli

$$m_x = \frac{m_0}{(\sqrt{1 - (v/c)^2})^3}, \quad m_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad [81]$$

chiamati rispettivamente *massa longitudinale* e *massa trasversale*; quest'ultima, coincide con la *massa relativistica*, già definita dalla [78].

L'equazione [80] assume in tal modo l'aspetto solito

$$F_x = m_x a_x, \quad F_y = m_y a_y. \quad [82]$$

In seguito, per evitare confusione, useremo però solo la massa relativistica $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Deve essere posto in risalto, comunque, il fatto che in meccanica relativistica il termine "massa" si riferisce a quantità differenti, in corrispondenza, per esempio, alle espressioni della quantità di moto totale, della forza longitudinale o della forza trasversale; queste masse inoltre, non sono costanti caratteristiche del corpo, ma dipendono dalla sua velocità. Nella dinamica di Einstein quindi, il concetto di massa è notevolmente differente dal comune significato che si attribuisce a questo termine, cioè di quantità di materia di un corpo. La massa di riposo m_0 è in un certo senso una misura della massa di Einstein, ma, al contrario di ciò che avviene nella meccanica ordinaria, non è uguale, in ogni arbitrario sistema di riferimento, al rapporto tra quantità di moto e velocità o tra forza e accelerazione.

La [78] c'insegna che la massa relativistica m assume valori crescenti man mano che la velocità v del corpo in moto si avvicina alla velocità della luce; per $v=c$ la massa diventerebbe infinita.

È chiaro quindi che un corpo non può muoversi con una velocità maggiore della velocità della luce, poiché in tal caso anche la sua resistenza inerziale aumenterebbe fino a infinito.

In questo senso, l'ipotesi a prima vista paradossale dell'esistenza di una velocità limite, si rivela piuttosto come un'intrinseca conseguenza della nuova formulazione delle leggi fisiche.

La [78], che esprime la dipendenza della massa dalla velocità, è identica alla relazione precedentemente trovata da Lorentz, in base a calcoli elettrodinamici, che esprimeva m_0 in funzione dell'energia elettrostatica S dell'elettrone stazionario; tale relazione, già esistente peraltro nella teoria di Abraham (formula [69], p. 254), era

$$m_0 = \frac{4S}{3c^2}.$$

Ma nell'ambito della teoria di Einstein, la dipendenza della massa dalla velocità ha un significato ben più generale, poiché del tutto indipendente dall'origine, elettrodinamica o no, della massa.

Gli esperimenti di Kaufmann (1901) e altri, basati sulla deviazione subita dai raggi catodici sotto l'azione di campi elettrici e magnetici, hanno dimostrato con estrema precisione la validità della formula di Lorentz [78]. Queste misure d'altra parte non possono più essere considerate come una conferma dell'ipotesi sull'origine elettromagnetica della massa, dal momento che la teoria della relatività di Einstein mostra come la massa, indipendentemente dalla sua origine, deve dipendere dalla velocità secondo un'identica formula.

Un'ulteriore conferma della [78] viene dalla spettroscopia. Un atomo è formato da un nucleo pesante carico positivamente e da elettroni in numero tale che l'intero sistema sia elettricamente neutro; scopo della spettroscopia è lo studio delle interazioni degli elettroni con la luce. Poiché le misure spettroscopiche raggiungono un'estrema accuratezza, non è difficile osservare in che modo il comportamento degli elettroni si allontani da quello previsto in accordo alle leggi della dinamica classica. I risultati di tali osservazioni hanno confermato pienamente la validità della dinamica di Einstein.

8. L'inerzia dell'energia

Vi è un aspetto del processo di collisione anelastica di cui non ci siamo occupati nel paragrafo precedente, e cioè la relazione che intercorre tra le masse m delle singole sfere e la massa M del sistema costituito dalle due sfere dopo l'urto. Riprendiamo a tale scopo l'equazione [7]

$$m(u) + m(0) = M(\bar{u}),$$

e consideriamo un sistema S'' in cui M abbia velocità nulla (fig. 129)



Fig. 129. Urto di due sfere identiche (vedi fig. 126b) osservato in un sistema S'' in cui la velocità comune dopo l'urto è nulla. Le velocità prima dell'urto sono \bar{u} e $-\bar{u}$.

e quindi la massa delle due sfere unite sia $M(0)=M_0$. S'' è ovviamente in moto rispetto ad S con velocità \bar{u} , e poiché le due sfere sono uguali, per ragioni di simmetria le loro velocità in S'' saranno opposte prima dell'urto. In questo sistema \bar{u} diventa 0, u si trasforma in \bar{u} , 0 in $-\bar{u}$, e la legge di conservazione della massa conduce alla

$$m(\bar{u}) + m(-\bar{u}) = 2m(\bar{u}) = M(0) = M_0 \quad [\alpha]$$

da cui

$$M_0 = 2 \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\bar{u}/c)^2}} \quad [\alpha']$$

Nel caso di piccole velocità, cioè per $\bar{u} \ll c$, si ottiene

$$M_0 = 2m_0 \left(1 + \frac{\bar{u}^2}{2c^2} \right) = 2m_0 + 2 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{2} m_0 \bar{u}^2. \quad [\beta]$$

La massa di riposo M_0 non è uguale alla massa di riposo $2m_0$ delle due sfere in collisione, come ci si potrebbe aspettare, e ne differisce per un contributo del secondo ordine che rappresenta l'energia cinetica delle due masse prima dell'urto, divisa per c^2 . L'energia cinetica di una sfera è infatti $T = m_0 \bar{u}^2 / 2$. Si osservi inoltre che l'energia totale $2T$ posseduta dalle due sfere nell'atto in cui si arrestano in seguito all'urto, si converte nella quantità di calore $Q = 2T$. La relazione

$$M_0 = 2m_0 + Q/c^2 \quad [\gamma]$$

può allora essere interpretata nel senso che a un aumento di energia termica, corrisponde un aumento della massa di una quantità Q/c^2 .

Un altro esempio di variazione della massa si ha in corrispondenza a una variazione dell'energia cinetica; la relazione che esprime la dipendenza della massa $m(v)$ dalla velocità v per $v \ll c$:

$$m(v) = m_0 + \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{2} m_0 v^2 = m_0 + \frac{T}{c^2} \quad [\delta]$$

dimostra che la massa aumenta anche in questo caso di una quantità pari a un'energia, l'energia cinetica T del corpo in movimento, divisa per c^2 .

I precedenti risultati si generalizzano affermando che l'aggiunta di un'energia e a un corpo, comporta un aumento della sua massa di e/c^2 . Ciò è valido, come abbiamo visto, nel caso dell'energia cinetica e dell'energia termica, ma continua a valere presumibilmente anche per altre forme d'energia, quali ad esempio l'energia elettrica e l'energia chimica.

Moltiplicando l'equazione $[\beta]$ per c^2 e utilizzando la $[\gamma]$, si ottiene

$$2m_0 c^2 + 2T = M_0 c^2 = 2m_0 c^2 + Q \quad [\beta']$$

cioè

$$2T = Q. \quad [\beta'']$$

Questa equazione rappresenta la legge di conservazione dell'energia ed esprime il fatto che l'energia prima (energia cinetica $2T$) e dopo (energia termica Q) l'urto, sono uguali; essa non è altro che un caso particolare della [17], in cui siano considerate soltanto l'energia cinetica e l'energia termica.

Dal punto di vista della relatività quindi, la legge di conservazione della massa è del tutto equivalente alla legge di conservazione dell'energia; ciò suggerisce di affermare che l'energia E di un corpo è uguale al prodotto della sua massa per il quadrato della velocità della luce:

$$E = mc^2. \quad [83]$$

L'energia cinetica T è definita come differenza tra l'energia $E = m(v)c^2$ del corpo in moto e l'energia di riposo $E_0 = m_0(v)c^2$, cioè

$$T = [m(v) - m_0]c^2, \quad [84]$$

che, per piccoli valori di v , si riduce alla definizione classica $T = (m_0/2)v^2$. Con questa nuova definizione di T , le equazioni $[\beta']$ e $[\beta'']$ sono valide anche per velocità confrontabili con c .

Siamo di fronte in questo caso a una sostanziale differenza tra meccanica classica e meccanica relativistica: in meccanica classica è necessaria una distinzione fra processi in cui l'energia meccanica^{mecc} si

conserva e processi in cui tale energia non si conserva, ma si trasforma in calore o in energia di altro tipo. Nella meccanica relativistica, la legge di conservazione dell'energia ha un significato del tutto generale e include ogni forma d'energia:

$$m(u)c^2 + m_0c^2 = M(\bar{u})c^2.$$

Questa equazione si riduce come caso limite alla formula ottenuta in fisica classica. Infatti dalla

$$m_0c^2 + (m_0/2)u^2 + m_0c^2 = M_0c^2 + (M_0/2)\bar{u}^2$$

e tenendo conto che $M_0 = 2m_0 + Q/c^2$, dove $Q = 2 \times (m_0/2)\bar{u}^2$ si ottiene

$$\frac{1}{2}m_0u^2 = Q + 2m_0\bar{u}^2 + \frac{1}{2}Q\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)^2.$$

Nell'approssimazione classica $\bar{u} \ll c$, l'ultimo termine di questa relazione è trascurabile e rappresenta infatti una parte della correzione relativistica dell'energia cinetica; esso è più piccolo di un fattore \bar{u}^2/c^2 rispetto agli altri due termini, e può essere omissso per piccoli valori delle velocità u e \bar{u} . Si ha quindi

$$\frac{1}{2}m_0u^2 = Q + \frac{1}{2}(2m_0)\bar{u}^2, \quad [85]$$

dove a primo membro compare l'energia cinetica T_1 del sistema prima dell'urto, e dei due contributi a secondo membro, il primo, Q , rappresenta quella parte di T_1 che si è trasformata in calore in seguito all'urto, il secondo è l'energia cinetica residua T_2 posseduta dalle due sfere unite. Poiché classicamente $\bar{u} = u/2$, avremo $(m_0/4)u^2 = T_1/2$ e $Q = T_1/2$, che sono appunto le formule classiche.

Vediamo ora di calcolare la variazione di T (o di E) dovuta a una forza agente per un breve intervallo di tempo τ . Siano v , $T(0)$, ed $E(0)$, \bar{v} , $T(\tau)$ ed $E(\tau)$ rispettivamente, la velocità nella direzione dell'asse x , l'energia cinetica e l'energia totale di un corpo prima e dopo che sia sottoposto all'azione della forza; ricordando la [83]

possiamo allora scrivere

$$E(\tau) - E(0) = T(\tau) - T(0) = [m(\bar{v}) - m(v)]c^2.$$

Poiché dall'equazione [ε] del paragrafo precedente risulta

$$m(\bar{v}) = m(v) \left[1 + \frac{vw_x}{c^2(1-v^2/c^2)} \right],$$

con w_x che rappresenta l'incremento della velocità dovuto alla forza (fig. 128), si ottiene

$$E(\tau) - E(0) = \frac{w_x v}{1-v^2/c^2} m(v) = F_x v \tau,$$

dove per l'ultimo passaggio si è tenuta presente l'equazione [80]. Il rapporto

$$\frac{E(\tau) - E(0)}{\tau} = \frac{T(\tau) - T(0)}{\tau},$$

cioè la variazione di energia, è quindi uguale, introducendo la componente $a_x = w_x/\tau$ dell'accelerazione, a

$$\frac{T(\tau) - T(0)}{\tau} = \frac{m(v)}{1-v^2/c^2} a_x v = F_x v, \quad [86]$$

mentre la formula corrispondente in meccanica classica sarebbe

$$\frac{T(\tau) - T(0)}{\tau} = m_0 a_x v = F_x v.$$

La quantità a secondo membro dell'equazione [86] rappresenta la variazione, negativa, dell'energia potenziale U . Possiamo ritenere infatti che in un intervallo di tempo τ sufficientemente piccolo la forza sia approssimativamente costante, e quindi procedere come se avessimo a che fare con una forza di tipo gravitazionale. Come abbiamo visto nel secondo capitolo (formula [15], p. 68) l'energia potenziale sarebbe allora Gx , e poiché in quel caso x era orientato in verso opposto a quello della forza di gravità, si aveva $G = -F_x$.

Dette $x(0)$ e $x(\tau)$ le posizioni prima e dopo l'azione della forza, la variazione nel tempo dell'energia potenziale sarà allora

$$\frac{U(\tau) - U(0)}{\tau} = G \frac{x(\tau) - x(0)}{\tau} = Gv = -F_x v,$$

dal momento che per la definizione stessa di velocità, $[x(\tau) - x(0)]/\tau = v$. Da questa e dalla [86] si ottiene

$$T(\tau) + U(\tau) = T(0) + U(0),$$

cioè, analogamente a quanto avviene in meccanica classica, la quantità $T+U$ è costante rispetto al tempo.

L'equazione di Einstein [83]

$$E = mc^2,$$

che stabilisce una relazione di *proporzionalità fra energia e massa inerziale*, è chiamata spesso *legge d'inerzia dell'energia*, e costituisce forse il risultato più importante della teoria della relatività. Per questo, ora ne daremo un'ulteriore dimostrazione, dovuta allo stesso Einstein, per la quale non è necessario ricorrere al formalismo matematico della teoria della relatività.

Essa si basa sul fatto che, secondo le equazioni di campo di Maxwell e un teorema dimostrato per la prima volta da Poynting (1884), un'onda luminosa che colpisca una sostanza assorbente esercita su di essa una certa pressione. In particolare si può vedere che l'impulso trasferito da un fascio di luce a una superficie assorbente è uguale a E/c , dove E è l'energia del fascio luminoso. Questo fatto, come mostreremo nel prossimo paragrafo, fu confermato sperimentalmente da Lebedew (1890) e più tardi, con maggiore accuratezza, da Nichols e Hull (1901) e da altri. In modo del tutto analogo, si può dimostrare che un corpo che emette luce subisce un'identica (ma opposta) "pressione", simile al rinculo subito da un cannone dopo aver sparato un colpo.

Supponiamo ora di avere un tubo che contenga ai suoi estremi

due corpi A e B di uguali dimensioni e composti della medesima sostanza, quindi, secondo le idee comuni, di ugual massa (fig. 130). Ammettiamo però che A abbia un eccesso d'energia E rispetto a B , per esempio energia termica, e che mediante un opportuno strumento (uno specchio concavo o qualcosa di analogo) tale energia sia inviata a B sotto forma di radiazione. Supponiamo inoltre che l'estensione nello spazio di questo fascio di radiazione sia piccola rispetto alla lunghezza l del tubo.

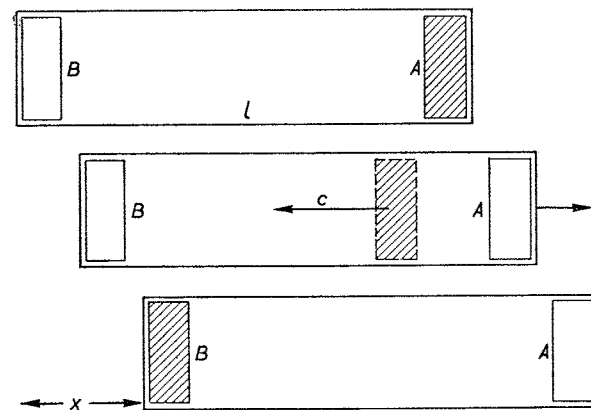


Fig. 130. Un tubo contiene ai suoi estremi due corpi uguali, A e B ; A trasferisce a B sotto forma di un fascio luminoso di velocità c una certa energia E , e il rinculo così prodotto mette in moto il tubo, che acquista una velocità v . Quando B ha assorbito l'energia E , il tubo si trova di nuovo in una posizione di riposo, ma risulta spostato di un tratto x .

A subisce allora un rinculo pari a E/c , e se questo effetto fosse trasmesso a tutto il tubo di massa M , esso acquisterebbe una velocità v data dall'equazione

$$Mv = E/c.$$

Questo impulso d'altra parte non può trasferirsi al tubo istantaneamente, perché in tal caso, cioè se il tubo fosse rigido, l'effetto si

propagherebbe con velocità maggiore di quella della luce. In realtà, il rinculo si propaga da A a B attraverso il tubo grazie alle forze elastiche delle pareti, e con una velocità molto più piccola di c . Il processo consiste quindi di due parti distinte: 1) emissione della radiazione da parte di A , 2) assorbimento da parte di B , i cui effetti sul tubo indipendenti fra loro, vanno considerati dopo un intervallo di tempo sufficiente affinché non solo il movimento elastico eccitato dall'urto si sia esteso all'intero tubo, ma ogni vibrazione abbia avuto termine. Lo spostamento totale subito dal tubo è il risultato del rinculo successivo all'emissione nel punto A e dell'impulso ricevuto da B , poiché onde elastiche di piccola ampiezza si sovrappongono senza distorcersi.

1). Il rinculo nel punto A trasferisce al tubo un movimento tale che, nell'istante t_1 in cui ogni vibrazione è scomparsa, esso si è spostato di un tratto

$$x_1 = vt_1.$$

2). L'assorbimento della radiazione nel punto B causa uno spostamento del tubo in direzione opposta alla precedente, pari a

$$x_2 = -v(t_1 - t),$$

dove t è il tempo necessario alla radiazione per andare da A a B ; quindi l'urto su B avviene con un ritardo t . Lo spostamento risultante

$$x = x_1 + x_2 = vt,$$

è uguale a quello che si sarebbe ottenuto considerando rigido il tubo.* Eseguendo infine le sostituzioni $v = E/Mc$ e $t = l/c$ si ottiene

$$x = (El)/(Mc^2).$$

Supponiamo ora di scambiare fra loro le posizioni di A e B ;

* In una prima versione (1905) Einstein si era servito appunto di questa ipotesi; più tardi (1907) egli stesso criticò il concetto di corpo rigido nell'ambito della teoria della relatività. Il calcolo che noi riportiamo segue in modo semplificato una trattazione dovuta a E. Feenberg.

ciò può essere fatto senza ricorrere a influenze esterne ammettendo per esempio che due uomini posti all'interno del tubo scambino di posto A e B , e quindi ritornino nelle loro posizioni originali. Secondo la meccanica ordinaria il tubo non subirebbe alcuno spostamento, in quanto qualsiasi cambiamento di posizione può avvenire solo mediante l'intervento di forze esterne.

Se si eseguisse questo scambio niente muterebbe all'interno del tubo, poiché il corpo dotato d'energia radiante E si troverebbe sempre nella posizione di inizio e la distribuzione di massa non subirebbe alcuna variazione. Ma il tubo nel suo insieme dovrebbe risultare spostato di un tratto x rispetto alla sua posizione iniziale a causa dell'impulso della radiazione; il che è, naturalmente, in contraddizione con tutte le leggi fondamentali della meccanica. È chiaro d'altra parte che ripetendo tale processo, sarebbe possibile variare arbitrariamente la posizione del sistema senza l'intervento di forze esterne; e questo è impossibile. Vi è allora un solo modo per superare tale difficoltà, e consiste nell'assumere che quando i corpi A e B sono scambiati essi non siano equivalenti dal punto di vista meccanico, ma la massa B superi A di una quantità m in conseguenza del suo eccesso di energia E . Non vi è più simmetria quindi poiché durante lo scambio la massa m si sposta da destra a sinistra di una distanza l ; nello stesso tempo il tubo si è spostato di un tratto x in direzione opposta. Questa distanza si determina ricordando che il processo avviene senza l'intervento di cause esterne; la quantità di moto totale risultante dalla somma delle quantità di moto del tubo $M(x/t)$ con quella della massa trasportata $-m(l/t)$, è perciò nulla:

$$Mx - ml = 0.$$

Da ciò segue che

$$x = (ml)/M.$$

Questo spostamento deve esattamente eguagliare quello prodotto dall'impulso di luce, e quindi

$$x = (ml)/M = (El)/(Mc^2),$$

da cui

$$m = E/c^2.$$

Questa quantità di massa inerziale va attribuita all'energia E affinché resti valido il principio della meccanica in base al quale nessuna variazione di posizione può avvenire senza l'intervento di forze esterne.

Poiché ogni forma di energia può sempre essere trasformata in energia di radiazione mediante processi particolari, questa legge deve essere universalmente valida, e rappresenta una grande unificazione della nostra conoscenza della realtà fisica: *la materia nel suo significato più generale* (comprendendo quindi la luce e altre forme di energia pura, secondo il linguaggio della fisica classica) *si manifesta in due aspetti fondamentali: l'inerzia, misurata dalla massa, e la capacità di compiere lavoro, misurata dall'energia*, strettamente legate l'una all'altra. Qualsiasi intensa accumulazione di energia dovuta all'esistenza di campi elettrici e magnetici o ad altre cause è sempre accompagnata dalla presenza di una certa inerzia; gli elettroni e gli atomi sono esempi di enormi concentrazioni di energia.

Vogliamo ora almeno accennare ad alcune delle numerose e importanti conseguenze di questo teorema.

Per quanto riguarda la massa dell'elettrone, ad esempio, la formula [69] (p. 254) mostra che l'energia elettrostatica che compare nell'espressione della massa di riposo $m_0 = (4/3)(Sc^2)$, non può essere l'energia totale E dell'elettrone; deve esistere quindi un'altra forma d'energia V , con $E = S + V$, tale che

$$m_0 = \frac{4S}{3c^2} = \frac{E}{c^2} = \frac{S + V}{c^2},$$

e uguale a $(4/3)S - S = S/3 = E/4$. Così l'energia totale è per tre quarti energia elettrostatica e per un quarto un'energia di tipo diverso, dovuta alle forze di coesione che rendono stabile il sistema costituito dall'elettrone, bilanciando la repulsione elettrostatica.

Altri esempi provengono da studi recenti nel campo delle parti-

celle elementari. Essi hanno mostrato, ad esempio, l'esistenza di tre differenti mesoni π (vedi p. 309), due dotati di una carica uguale (la stessa carica portata dall'elettrone) e di segno opposto, e un terzo elettricamente neutro (π^+ , π^- e π^0). Misure esatte delle masse di queste particelle hanno rivelato inoltre che le masse dei π^\pm sono uguali e superano di 273 volte la massa dell'elettrone, mentre la massa del π^0 è soltanto 264 volte quella dell'elettrone. Come nel caso dell'elettrone, questa differenza di massa può essere interpretata come una conseguenza della carica elettrica, nel senso che l'energia S del campo elettrico generato dalla carica, identica per mesoni positivi e negativi, conduce a un eccesso di massa rispetto al π^0 pari a S/c^2 . La differenza di massa $m_\pm - m_0 = 9m_{el}$ (dove m_{el} è la massa dell'elettrone) mostra che l'energia elettrostatica che si accumula nei mesoni carichi è molto più grande dell'energia che rende stabile l'elettrone. Riprendiamo ora la relazione trovata nel capitolo 5, che stabiliva una connessione fra l'energia S di una carica e distribuita sulla superficie di una sfera e il raggio r

$$S = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r}$$

e appliciamola al caso del mesone carico. Si ottiene allora

$$c^2(m_\pm - m_0) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r},$$

dove r è il "raggio" della distribuzione di carica del mesone che risulta uguale a $1,5 \times 10^{-14}$ cm, un valore molto più piccolo del raggio dell'elettrone, in corrispondenza a una elevata differenza di massa.

Come abbiamo già ricordato, l'atomo è un sistema formato da un piccolo nucleo carico positivamente (con dimensioni dell'ordine di 10^{-13} cm), costituito da protoni e neutroni, e da una "nube di elettroni" che neutralizza esattamente la carica nucleare. Il protone che possiede una carica positiva identica alla carica elettronica e ha una massa circa 2000 volte più grande di m_{el} , è il nucleo dell'atomo più leggero, l'idrogeno, formato appunto da un protone e un elettrone.

Il neutrone ha circa la stessa massa del protone, e deve il suo nome al fatto di essere elettricamente neutro. Un atomo è caratterizzato da due quantità: la massa, che è essenzialmente la massa del nucleo (poiché la massa degli elettroni è in confronto praticamente trascurabile), e la carica, che è uguale al numero di protoni (o al numero di elettroni); il suo comportamento chimico è determinato dalla nube di elettroni, che si estende a distanze di circa 10^{-8} cm dal nucleo. È chiaro allora che, poiché solo il numero di protoni o di elettroni è responsabile delle proprietà chimiche dell'atomo, gli atomi i cui nuclei hanno lo stesso numero di protoni ma differente numero di neutroni, devono avere un identico comportamento chimico, ma masse diverse. Tali atomi sono chiamati *isotopi*, e in natura generalmente gli elementi chimici si presentano come miscele di parecchi isotopi.

L'esempio più semplice ci è fornito dall'idrogeno, il cui isotopo, il cosiddetto idrogeno pesante o deuterio, ha un nucleo (il deutone) formato da un protone e da un neutrone. Ma, mentre le masse del protone e del neutrone insieme danno

$$\text{massa del protone} \quad m_p = 1,6724 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\text{massa del neutrone} \quad m_n = 1,6747 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_p + m_n = 3,3471 \times 10^{-24} \text{ g},$$

la massa del deutone è soltanto

$$m_D = 3,3433 \times 10^{-24} \text{ g}.$$

Secondo la [83] allora, la differenza di massa

$$m_p + m_n - m_D = 0,0038 \times 10^{-24} \text{ g}$$

(circa quattro masse elettroniche) deve essere proporzionale all'energia necessaria al deutone per scindersi in un protone e in un neutrone, energia che protone e neutrone libererebbero se fossero combinati per formare un deutone (fusione nucleare). Ciò è pienamente confermato dall'esperienza.

Sempre nello stesso campo, un altro esempio è di estrema importanza tecnica e trova applicazione nei reattori atomici. Consideriamo il seguente processo: un nucleo dell'isotopo d'uranio U_{235} (che è formato da 235 particelle, 92 protoni e 143 neutroni) assorbe un neutrone, diventa instabile e si scinde in due nuclei più piccoli e in un certo numero di neutroni. Questi neutroni sono successivamente assorbiti da altri nuclei di uranio e ne provocano la scissione, sviluppando così una reazione a catena che si mantiene automaticamente. I prodotti di ogni fissione, dotati di elevate energie cinetiche, vengono arrestati dal materiale circostante, riscaldandolo. Anche in tal caso, la somma delle masse dei prodotti di fissione è più piccola della massa del nucleo di U_{235} , e la differenza vale circa 400 volte la massa dell'elettrone. L'energia dovuta a questa differenza di massa è l'energia cinetica dei frammenti del nucleo di uranio e si trasforma in calore.

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di questo effetto, basta paragonare il calore prodotto dalla fissione dell'uranio col calore prodotto dalla combustione del carbone: l'energia che si ottiene dalla fissione di 1 grammo di U_{235} , è uguale a quella prodotta dalla combustione di 20 tonnellate di carbone.

I due esempi considerati mostrano la possibilità di ottenere energia termica mediante due processi differenti: la fissione dei nuclei pesanti e la formazione di nuclei leggeri dai loro costituenti (fusione nucleare). L'ultimo processo è la sorgente di calore delle stelle.

Com'è noto, il processo di fissione viene usato nella bomba atomica (bomba A) e quello di fusione nella bomba a idrogeno (bomba H). Ma non è nostra intenzione discutere qui questi deplorabili aspetti degli sviluppi tecnici connessi con la formula di Einstein.

9. Energia e quantità di moto

Nel paragrafo 7 di questo capitolo (p. 322) abbiamo derivato la legge di conservazione della massa (o dell'energia) $[\gamma]$, ricorrendo soltanto alla legge di conservazione della quantità di moto. Ciò rivela l'esistenza di un legame molto stretto tra quantità di moto

ed energia, che rappresenta una nuova relazione caratteristica della teoria della relatività analoga a quella che intercorre tra lo spazio e il tempo.

Nel paragrafo 3, in base alla trasformazione di Lorentz, abbiamo dedotto l'invariante $F = x^2 - c^2 t^2$, dove x e t sono le coordinate di un punto di universo P . Ricordiamo che per invarianza di F , si intende che se in due sistemi, S e S' , aventi la stessa origine, si rappresenta P tramite le sue coordinate (x, t) e (x', t') , allora la quantità:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = F$$

è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.

Dalle equazioni $p = m(u)u$ ed $E = m(u)c^2$ possiamo costruirci una espressione quadratica che diventa, utilizzando la [78]:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = m^2(u)(u^2 - c^2) = m_0^2 \frac{u^2 - c^2}{1 - u^2/c^2} = -m_0^2 c^2. \quad [87]$$

Quindi l'espressione a primo membro è un invariante, cioè non dipende dal particolare sistema di riferimento in cui abbiamo misurato la quantità di moto e l'energia. Non è difficile, allora, dimostrare che: *la quantità di moto p , e l'energia E divisa per c^2 (o, in altri termini, la quantità di moto p e la massa m) nel passare da un sistema S a un altro sistema S' , si trasformano allo stesso modo di x e t , cioè secondo la trasformazione di Lorentz.*

Sia v infatti la velocità del sistema S' rispetto a S . Se assumiamo che tutte le velocità abbiano la direzione di v , possiamo scrivere la tabella:

$$\begin{array}{ll} \text{in } S \text{ quantità di moto: } & p = m(u)u, \quad \text{energia: } E = m(u)c^2; \\ \text{in } S' \text{ quantità di moto: } & p' = m(u')u', \quad \text{energia: } E' = m(u')c^2, \end{array}$$

dove fra le velocità u , u' intercorre la relazione

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v)/c^2}$$

(teorema di addizione delle velocità, [77a]).

Si ha quindi

$$p = m(u)u = m_0 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m_0 \frac{u' + v}{\sqrt{[1 + (u'v)/c^2]^2 - (u' + v)^2/c^2}}$$

cioè

$$p = m_0 \frac{u' + v}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{p' + v(E'/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad [88a]$$

e inoltre

$$\frac{E}{c^2} = m(u) = m_0 \frac{1 + (v/c^2)u'}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{E'/c^2 + (v/c^2)p'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad [88b]$$

Queste formule di trasformazione sono del tutto analoghe alla prima e alla quarta equazione delle [70b].

Se la quantità di moto non è diretta parallelamente all'asse x , ma ha componenti p_x, p_y, p_z in S , e p'_x, p'_y, p'_z in S' , nelle [88a, b] dobbiamo sostituire p con p_x e p' con p'_x , e completare le equazioni con $p_y = p'_y$ e $p_z = p'_z$.

Le formule inverse corrispondenti si scrivono:

$$p'_x = \frac{p_x - v(E/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad \frac{E'}{c^2} = \frac{E/c^2 - (v/c^2)p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad [88c]$$

in accordo con le [70a].

L'equazione [87] è di grande importanza; essa ci permette di determinare p una volta nota E , e viceversa:

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2} = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}, \quad [87a]$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad [87b]$$

Nella dimostrazione di Einstein della legge fondamentale dell'inerzia dell'energia, si utilizzò la relazione $p = E/c$, dove p è la quantità di moto ed E l'energia di un fascio di luce. Ora la luce è un flusso di energia di velocità c , quindi, secondo la teoria della relatività, la sua massa di riposo deve essere zero: $m_0 = 0$. Dalla [87a] segue infatti, come è richiesto, $p = E/c$.

Una interessante applicazione delle formule di trasformazione di p e di E si fa nella teoria quantistica, di cui parleremo brevemente. Si tratta della teoria dovuta a Planck (1900), su cui si basa la spiegazione dei fenomeni atomici. Uno dei suoi principali risultati consiste nella "quantizzazione" dell'energia della luce; con questa frase si intende che l'energia di un raggio di luce di frequenza ν non può avere un valore arbitrario, ma deve consistere di quanti di valore finito:

$$\varepsilon = h\nu \quad [89]$$

dove $h = 6,6 \times 10^{-27}$ erg·s è la costante fondamentale di Planck, che governa tutti i processi atomici.

Dalla [89] possiamo determinare la massa e il momento di un quanto di luce:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad p = \frac{\varepsilon}{c} = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad [90]$$

[$\lambda = c/\nu$ è la lunghezza d'onda della luce (vedi [35])].

Un'onda luminosa può quindi essere considerata come un ente formato da particelle che hanno massa di riposo nulla, quantità di moto $p = \varepsilon/c$ ed energia $\varepsilon = h\nu$.

Questi "quanti di luce", o "fotoni", possono essere convertiti in altre particelle, purché siano soddisfatte le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Discuteremo ora un esempio particolare, in cui si deve tener conto di un'altra legge di conservazione, cioè la conservazione della carica, secondo cui in una reazione fra particelle urtanti, la carica totale delle particelle prima dell'urto è uguale a quella delle particelle dopo l'urto.

Anderson (1932) trovò che i quanti di luce che entrano in collisione con altre particelle (i nuclei atomici) sono convertiti in coppie di particelle, ciascuna delle quali è formata da un elettrone e dalla sua controparte positiva, che viene chiamata positrone. Quest'ultima particella possiede esattamente le stesse proprietà dell'elettrone, fatta eccezione per la carica, che è della stessa grandezza, ma di segno opposto. Nel processo di formazione della coppia la carica ovvia-

mente si conserva. La conservazione dell'energia richiede che l'energia del quanto di luce ε sia maggiore dell'energia di riposo della coppia, $2m_{el}c^2$. Questo tuttavia non basta; occorre anche postulare che si conservi la quantità di moto.

Si può vedere facilmente che nel processo di formazione di coppie dovuto a quanti di luce nello spazio libero, le due leggi di conservazione non possono valere simultaneamente. Senza entrare in dettagli, si ha che se tale processo di conversione fosse possibile, esso potrebbe essere descritto in ogni sistema di riferimento. Ora per un osservatore che si trovi in un sistema di riferimento S' in moto con velocità v nella stessa direzione del quanto di luce, l'energia ε' del quanto, in base alla [88b] (ponendo $E' = \varepsilon' = p'c$, $E = \varepsilon$ e ricavando ε') è data da:

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad [91]$$

Scegliendo quindi v abbastanza grande, si può rendere ε' arbitrariamente piccolo.

Si vede immediatamente che in S' l'energia non può essere conservata, in quanto, come abbiamo visto, essa dev'essere maggiore di $2m_{el}c^2$, qualunque sia il sistema di riferimento. (Nel caso limite in cui $v = c$ l'energia del fotone si riduce a zero.)

Affinché il processo di creazione di coppie sia possibile, dev'essere presente un'altra particella, che abbia una quantità di moto e un'energia tali che le leggi di conservazione siano soddisfatte. Questo processo di conversione può quindi essere osservato soltanto in presenza di un nucleo atomico. Il nucleo infatti non varia durante il processo, e si comporta essenzialmente in modo che le leggi di conservazione siano rispettate. L'argomento precedente, in base al quale in un sistema S' che si muova con grande velocità l'energia del fotone è molto piccola, e quindi la condizione $\varepsilon' > 2m_{el}c^2$ non può essere soddisfatta, non è più valido ora, in quanto il nucleo atomico possiede in S' un'energia molto grande e pertanto può fornire la differenza di energia che manca.

Una relazione analoga a quella che intercorre tra le coordinate spaziali e temporali o tra quantità di moto ed energia, che abbiamo discusso poco fa, esiste anche tra carica e corrente. In base a ciò, vogliamo ora dare un rapido sguardo alla teoria relativistica dell'elettricità.

Consideriamo un cubo di spigolo l_0 , contenente N elettroni e quindi con carica totale $N \times e$. In questo volume la densità di carica ϱ_0 è data da

$$\varrho_0 = (Ne)/l_0^3.$$

Se si suppone che le cariche siano in quiete, la densità di corrente j_0 è zero.

Poiché lo spigolo del cubo parallelo alla direzione della velocità si contrae di $l_0^3 \sqrt{1-v^2/c^2}$, un osservatore rispetto a cui le cariche si muovono con velocità v nella direzione dello spigolo del cubo, misurerà un volume contratto $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Ma il numero di elettroni non può variare se si cambia il sistema di riferimento; l'osservatore misurerà perciò la densità di carica:

$$\varrho = \frac{Ne}{l_0^3 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad [92]$$

Le cariche in moto rappresentano una corrente la cui densità j , nell'interno del cubo, è data ovviamente da:

$$j = \frac{Nev}{l_0^3 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\varrho_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \varrho v. \quad [93]$$

In modo analogo a quanto avveniva nel caso degli invarianti precedentemente costruiti, e che erano formati da x e da t o da p e da m , in base alla [92] e alla [93] si può costruire un invariante formato da j e da ϱ :

$$j^2 - c^2 \varrho^2 = \varrho^2 (v^2 - c^2) = -\varrho_0^2 c^2. \quad [94]$$

Le equazioni [92] e [93] si possono anche scrivere nella forma

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{m_0} m, \quad j = \frac{\varrho_0}{m_0} p,$$

dove m_0 è la massa di riposo dell'elettrone: $m_0 = N \times m_{el}$. Per le quantità j e ϱ sussiste pertanto la stessa legge di trasformazione che vale nel caso di p e di m , cioè la trasformazione di Lorentz:

$$j' = \frac{j - v\varrho}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \varrho' = \frac{\varrho - (v/c^2)j}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

e l'inversa:

$$j = \frac{j' + v\varrho'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \varrho = \frac{\varrho' + (v/c^2)j'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

in accordo con le [70a, b] e le [88a, b, c].

Siamo così condotti a un notevole risultato. Consideriamo un lungo filo metallico, rettilineo, in cui circola una corrente, e che sia a riposo. Il filo è elettricamente neutro, in quanto il numero degli ioni positivi in quiete è uguale al numero degli elettroni negativi in movimento (n particelle per volume). Se indichiamo con u la velocità degli elettroni, possiamo scrivere per le densità di carica e di corrente:

$$\text{elettroni } \varrho_- = -ne \quad j_- = -neu = \varrho_- u$$

$$\varrho_+ + \varrho_- = 0;$$

$$\text{ioni } \varrho_+ = +ne \quad j_+ = 0.$$

Un osservatore che si muova con velocità v nella direzione del filo, troverà ora che il filo è carico. Infatti le densità di carica degli elettroni e degli ioni che egli misura sono date dalle trasformazioni

$$\varrho'_- = \frac{\varrho_- - (v/c^2)j_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\varrho_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right),$$

$$\varrho'_+ = \frac{\varrho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

da cui si ottiene, sommando, la densità totale:

$$q'_+ + q'_- = -q_- \frac{(vu)/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{nevu}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Si può vedere che si ottiene una carica positiva, come è illustrato nel diagramma x, ct (fig. 131b). Consideriamo per semplicità un filo metallico lineare, e supponiamo che gli ioni positivi e gli elettroni negativi siano su di esso equidistanti (distanza i) (fig. 131a). Per $t=0$ ioni ed elettroni possono occupare sul filo le stesse posizioni. Le linee di universo degli ioni in quiete sono date da linee parallele all'asse ct ; quelle degli elettroni, invece, pur essendo parallele fra loro, sono inclinate in direzione dipendente dalla velocità u . Se osserviamo il filo da un sistema x', ct' in moto con velocità v rispetto al sistema x, ct , troviamo che la distanza \overline{BO} degli ioni sull'asse x' è diversa dalla distanza \overline{DO} degli elettroni. Nella figura 131b \overline{BO} è minore di \overline{DO} ; la densità degli ioni è quindi maggiore di quella degli elettroni, e il filo risulta carico positivamente.

Consideriamo ora i campi generati dalle correnti e dalle cariche nei due sistemi. Sappiamo che il filo elettricamente neutro percorso da corrente nel sistema x, ct è circondato soltanto da un campo magnetico H , mentre il filo carico positivamente nel sistema x', ct' possiede in più un campo elettrico E . Pertanto nella teoria della relatività i concetti di campo elettrico e di campo magnetico non hanno un significato distinto; essi devono essere unificati nel concetto di campo elettromagnetico (E e H), le cui componenti dipendono dal sistema di riferimento. Ciò significa ad esempio che se in un sistema di riferimento S è presente soltanto un campo magnetico, un osservatore in S' troverà anche un campo elettrico, o viceversa. Si giunge così a una spiegazione qualitativa estremamente semplicemente discussi.

Nelle figure 103 e 105 è rappresentato un corpo che si muove in un campo magnetico, e quindi un osservatore solidale al corpo osserva un campo elettrico, che in un conduttore genera una cor-

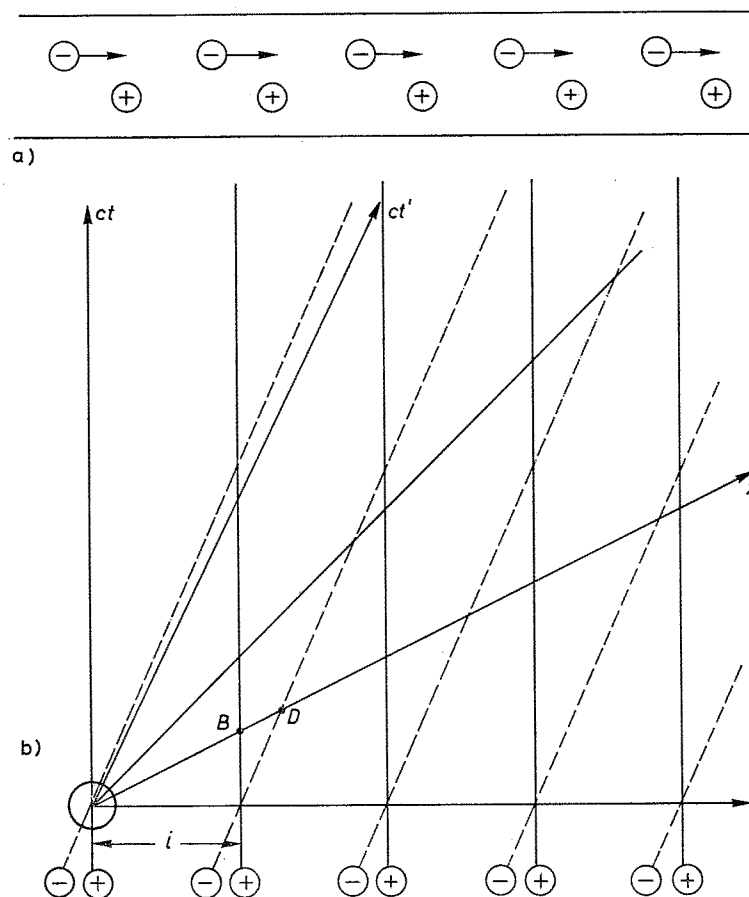


Fig. 131. a) Ioni \oplus in quiete ed elettroni \ominus in movimento in un filo metallico. b) Linee d'universo degli ioni, parallele all'asse ct , e linee d'universo degli elettroni in moto, parallele fra loro ma inclinate, e poste alla stessa distanza i l'una dall'altra. Le distanze \overline{OB} degli ioni, quando vengono osservate da un sistema x', ct' che si muove con velocità v rispetto al sistema x, ct , sono diverse dalle distanze \overline{OD} degli elettroni.

rente elettrica, e su una superficie isolante dà luogo a una distribuzione di cariche.

Ci occuperemo ora dei fenomeni ottici in un mezzo in movimento.

10. L'ottica dei corpi in movimento

Una volta discusse le più importanti implicazioni della nuova meccanica, ritorniamo ora allo studio dell'ottica dei corpi in movimento, che rappresentò il punto di partenza della teoria della relatività di Einstein. Le leggi fondamentali di questi fenomeni sono espresse sinteticamente dalle equazioni di campo di Maxwell, di cui Lorentz aveva già provato l'invarianza, nello spazio vuoto ($\epsilon=1$, $\mu=1$, $\sigma=0$), rispetto alle sue trasformazioni. Le equazioni di campo rigorosamente invarianti, valide nel caso dei corpi in movimento, furono scritte da Minkowski nel 1907; esse differiscono dalle formule di Lorentz della teoria degli elettroni per la presenza di termini non misurabili sperimentalmente, ma si basano come le precedenti sull'esistenza di una *convezione parziale* della polarizzazione dielettrica, e quindi interpretano in modo soddisfacente tutti i fenomeni elettromagnetici e ottici relativi ai corpi in movimento. Ricordiamo a questo proposito, anche se non li discuteremo in particolare poiché ciò richiederebbe calcoli troppo laboriosi, gli esperimenti di Röntgen, Eichenwald e Wilson (p. 235). L'ottica dei corpi in movimento può tuttavia essere trattata in modo del tutto elementare, ed è un problema che non vogliamo tralasciare poiché rappresenta una delle più significative applicazioni della teoria di Einstein.

In base alla teoria della relatività, non ha senso parlare di moto rispetto all'etere, ma soltanto di corpi in moto relativo; è evidente quindi che tutti i fenomeni ottici, che si verificano quando la sorgente luminosa, le sostanze attraversate dalla radiazione e l'osservatore sono in quiete in un riferimento inerziale, sono gli stessi per qualunque sistema inerziale. È in questo modo che si interpreta anche l'esperimento di Michelson e Morley; resta però da vedere se la teoria è in grado di spiegare correttamente i fenomeni che si

verificano quando sorgente luminosa, mezzo attraversato dalla radiazione e osservatore sono tra loro in moto relativo.

Consideriamo un'onda luminosa nell'interno di un mezzo materiale a riposo nel sistema di riferimento S ; siano $c_1=c/n$ (dove n è l'indice di rifrazione) e v la velocità e il numero di vibrazioni della luce, e supponiamo che la sua direzione di propagazione relativa a S coincida con quella dell'asse x . Il nostro problema è di vedere in che modo queste tre quantità caratteristiche dell'onda vengono percepite da un osservatore a riposo in un sistema S' in moto con velocità v parallela all'asse x del riferimento S .

La soluzione procederà sulla base del metodo già usato in precedenza (p. 152), con la differenza che ora, in luogo delle trasformazioni di Galileo, useremo le trasformazioni di Lorentz. Avevamo dimostrato allora che il numero d'onda

$$\nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} \right)$$

è un invariante, in quanto rappresenta il numero di onde che all'istante t_0 hanno raggiunto il punto x_0 , e hanno lasciato x_1 all'istante t_1 (fig. 69, p. 152). L'invarianza è naturalmente valida anche nel caso delle trasformazioni di Lorentz, e quindi

$$\nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_1} \right) = \nu' \left(t'_1 - t'_0 - \frac{x'_1 - x'_0}{c'_1} \right),$$

dove ν , ν' , c_1 , c'_1 sono rispettivamente le frequenze e le velocità dell'onda nei due sistemi S e S' . Se inseriamo a secondo membro le espressioni di x' e t' date dalla trasformazione di Lorentz [70a], otteniamo

$$\nu \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_1} \right) = \frac{\nu'}{\alpha} \left[t_1 - t_0 - \frac{v}{c^2} (x_1 - x_0) - \frac{x_1 - x_0 - v(t_1 - t_0)}{c'_1} \right]$$

dove $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Osserviamo l'intero treno d'onda, prima in un medesimo istante, cioè per $t_1 - t_0 = 0$, e otteniamo,

dividendo per $(x_1 - x_0)$

$$\frac{v}{c_1} = \frac{v'}{\alpha'} \left(\frac{v}{c^2} + \frac{1}{c_1'} \right); \quad [95a]$$

quindi in uno stesso punto, cioè per $x_1 = x_0$, per cui dividendo per $(t_1 - t_0)$ si ottiene

$$v = \frac{v'}{\alpha'} \left(1 + \frac{v}{c_1'} \right). \quad [95b]$$

Il rapporto fra la seconda equazione e la prima dà infine

$$c_1 = \frac{1 + v/c_1'}{v/c^2 + 1/c_1'} = \frac{c_1' + v}{1 + (vc_1')/c^2}.$$

Questa relazione è perfettamente in accordo con il teorema di addizione delle velocità di Einstein, relativo al caso di un moto longitudinale ([77a], p. 316) come si può vedere sostituendo u_x con c_1 e u'_x con c_1' . La stessa regola valida per il calcolo delle velocità dei corpi relative a differenti sistemi di riferimento, può essere applicata anche alla velocità della luce.

Se risolviamo l'equazione precedente rispetto a c_1' , la relazione che si ottiene

$$c_1' = \frac{c_1 - v}{1 - (vc_1)/c^2}$$

coincide con la *formula di trascinamento* di Fresnel [44] a meno di termini del second'ordine in $\beta = v/c$. In questa approssimazione infatti, possiamo scrivere

$$\frac{1}{1 - (vc_1)/c^2} = \frac{1}{1 - \beta/n} = 1 + \frac{\beta}{n} = 1 + \frac{v}{nc},$$

per cui

$$c_1' = (c_1 - v) \left(1 + \frac{v}{nc} \right) = c_1 - v + \frac{vc_1}{nc} - \frac{v^2}{nc} = c_1 \left(1 - \frac{v}{c_1} + \frac{v}{nc} - \frac{c}{nc_1} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Trascurando l'ultimo termine, che è del secondo ordine in β , e posto $c_1/c = 1/n$, si ha

$$c_1' = c_1 - v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

che è appunto la *formula di trascinamento* di Fresnel.

L'equazione [95b] è l'espressione matematica dell'effetto Doppler, generalmente valida nel caso in cui $c_1 = c$, cioè nel vuoto; in tal caso, com'è noto dal teorema di addizione delle velocità (p. 316), anche $c_1' = c$, e la [95b] diventa

$$v' = v \frac{\alpha}{1 + v/c} = v \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta}$$

cioè

[95c]

$$v' = v \frac{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}{1 + \beta} = v \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}};$$

l'espressione esatta dell'effetto Doppler assume pertanto la forma simmetrica

$$v' \sqrt{1 + \frac{v}{c}} = v \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \quad [96]$$

dov'è evidente l'equivalenza dei due sistemi di riferimento S ed S' .

Si osservi che per piccoli valori di $\beta = v/c$ la [95c] si riduce alla nota relazione [41]

$$v' \cong \frac{v}{1 + \beta} \cong v(1 - \beta).$$

Alla [96] si può giungere anche ricorrendo al concetto di quanto di luce con energia $\varepsilon = hv/c$ e con quantità di moto $p = \varepsilon/c$; basta infatti sostituire nella [91] al posto di ε ed ε' rispettivamente hv e hv' , perché questa coincida con la [96].

Per grandi velocità la formula relativistica [96] differisce da quella ottenuta in fisica classica [41]; ciò è ancor più evidente se si con-

sideri il caso in cui la direzione di propagazione della luce e la velocità relativa v non sono parallele, e in particolare quando tali direzioni sono fra loro perpendicolari. Contrariamente a quanto avviene nella teoria classica, anche in questo caso esiste un effetto Doppler, di origine tipicamente relativistica, al quale si dà spesso il nome di *effetto Doppler trasversale*, e che può essere studiato in modo del tutto analogo all'effetto longitudinale.

Supponiamo come nel caso precedente, che la velocità relativa dei sistemi S e S' sia diretta lungo l'asse x (coincidente con x'), mentre la direzione di propagazione della luce sia, per esempio, parallela all'asse y' . Osserviamo allora che, se in S' la distanza fra gli estremi del treno d'onde (che inizia nell'istante t'_0 e termina nell'istante t'_1) è $y'_1 - y'_0$, nel sistema S tale distanza non sarà semplicemente $y_1 - y_0$, ma dovrà dipendere anche dalla differenza $x_1 - x_0$; ammettiamo per esempio che sia una combinazione lineare del tipo $a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)$. In base all'invarianza del numero d'onda, potremo scrivere quindi

$$v \left(t_1 - t_0 - \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{c_1} \right) = v' \left(t'_1 - t'_0 - \frac{y'_1 - y'_0}{c'_1} \right).$$

Consideriamo a questo punto la trasformazione di Lorentz, in una delle due forme [70a] o [70b]. Se usiamo le [70b] e quindi assumiamo $x'_1 = x'_0$ e $y'_1 = y'_0$, esprimendo così il fatto che l'esperimento viene realizzato in un punto fissato di S' , il calcolo diventa piuttosto laborioso poiché richiede la conoscenza della costante a . Al contrario servendosi delle [70a] e posto $x_1 = x_0$ e $y_1 = y_0$, si ottiene facilmente

$$v = \frac{v'}{\alpha}.$$

Possiamo concludere quindi che un osservatore in moto con velocità v rispetto al sistema S in cui è situata la sorgente luminosa di frequenza ν , misura perpendicolarmente alla direzione di propagazione una frequenza

$$\nu' = \alpha \nu = \nu \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

minore di ν . Si tratta, com'è evidente dal nostro ragionamento, di una pura conseguenza della dilatazione del tempo, $t'_1 - t'_0 = (1/\alpha)(t_1 - t_0)$.

L'effetto Doppler trasversale è stato osservato in laboratorio usando raggi canale (p. 160) di velocità e direzione definita (Ives e Stilwell, 1938; Ottings, 1939). La difficoltà di queste misure è legata al sovrapporsi di un contributo dovuto all'effetto Doppler longitudinale non appena la direzione di osservazione si sposta, anche di poco, rispetto alla perpendicolare. Tale difficoltà si supera però notando che nel caso di due raggi luminosi emessi in direzioni opposte da un raggio canale, lo spostamento Doppler longitudinale subito è uguale e contrario; basta quindi osservare simultaneamente entrambi i raggi luminosi e prendere la media dei risultati, per eliminare completamente ogni effetto longitudinale. Grazie a questo artificio è stato possibile dare una conferma sperimentale dell'effetto trasversale, e quindi indirettamente anche della dilatazione del tempo.

Per discutere ora il fenomeno dell'aberrazione, potremmo continuare a servirci del metodo precedentemente introdotto e determinare in che modo la direzione di propagazione del raggio luminoso, cioè i coefficienti a e b , si modifichi per effetto della trasformazione di Lorentz; in tal modo andremmo incontro però ad alcune complicazioni di calcolo, e riteniamo quindi preferibile seguire un diverso procedimento, che consiste nell'applicare ai quanti di luce il teorema di addizione delle velocità.

Consideriamo un raggio luminoso che si propaghi nella direzione dell'asse y del sistema S' , e siano quindi $u'_x = 0$ e $u'_y = c$; dalle formule di trasformazione [77a, b] si ottengono allora per le componenti della velocità nel sistema S , le seguenti espressioni:

$$u_x = v \quad \text{e} \quad u_y = c \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

In tal modo, mentre il modulo della velocità è ancora c , poiché $\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c$, la direzione di propagazione del raggio luminoso nel sistema di riferimento S non è più perpendicolare all'asse x , ma risulta inclinata rispetto ad y . Il rapporto fra le componenti della velocità u_x/u_y corrisponde alla definizione elementare della costante

di aberrazione d/l (fig. 132), dove l è la lunghezza del telescopio e d lo spostamento che esso subisce durante il tempo impiegato dalla luce ad attraversare il tubo (4.3). Si ottiene quindi

$$\frac{d}{l} = \frac{u_x}{u_y} = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

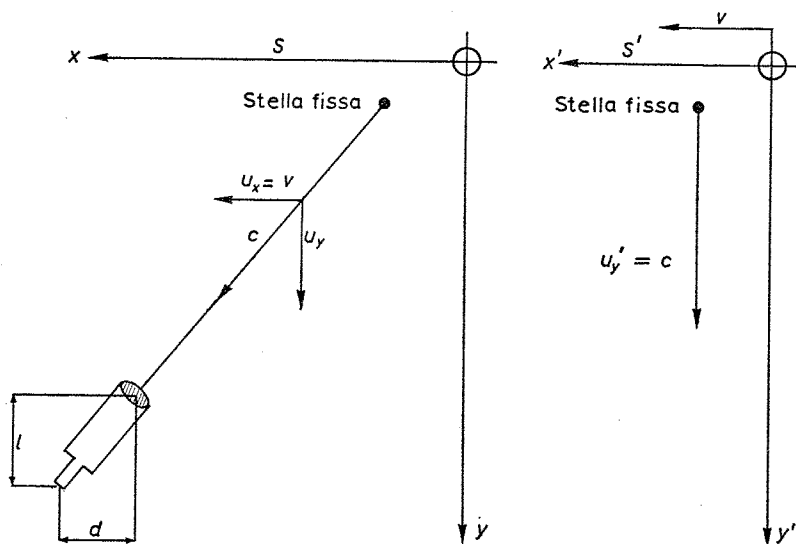


Fig. 132. Il fenomeno dell'aberrazione nella teoria della relatività. Nel sistema di riposo della stella fissa S' , in moto con velocità v rispetto alla terra, la luce viaggia nella direzione dell'asse y , mentre nel sistema di riposo della terra S , tutte e due le componenti della velocità, u_x e u_y , sono diverse da zero. (Si osservi che affinché le componenti della velocità assumano valori positivi, si sono invertite le direzioni degli assi x e y .)

Un altro modo per arrivare alla formula dell'aberrazione si basa, come abbiamo già detto, sul concetto di quanto di luce e consiste nell'applicare le formule di trasformazione [88a, b] alle componenti della quantità di moto e dell'energia. Scriviamo allora, con le solite

abbreviazioni $\alpha = \sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$,

$$\alpha p_x = p'_x + \beta \frac{E'}{c}, \quad p_y = p'_y, \quad \alpha E = E' + v p'_x.$$

Nell'ipotesi che il quanto di luce si muova in S' nella direzione dell'asse y e quindi $p'_x = 0$, $p'_y = p' = E'/c$, in S si ha:

$$\alpha p_x = \beta \frac{E'}{c} = \beta p'_y = \beta p_y \quad \text{e} \quad \alpha E = E'.$$

Il rapporto $p_x/p_y = \beta/\alpha$ coincide con l'espressione per d/l data precedentemente. Secondo Planck l'energia di un quanto di luce è $E = h\nu$ nel sistema S , e $E' = h\nu'$ in S' ; supponendo allora che S' coincida con il sistema di riposo S_0 degli atomi che emettono la radiazione luminosa, si avrà $\nu' = \nu_0$ e la relazione $\alpha E = E'$ corrisponderà esattamente alla $\alpha\nu = \nu_0$, che non è altro che la formula dell'effetto Doppler trasversale già ottenuta con un diverso procedimento.

La formula elementare dell'aberrazione si ottiene trascurando β^2 rispetto a 1,

$$\frac{d}{l} = \beta = \frac{v}{c}.$$

Questo risultato è particolarmente notevole, dal momento che tutte le teorie basate sull'esistenza di un etere materiale incontravano considerevoli difficoltà proprio nel tentativo di dare una spiegazione al fenomeno dell'aberrazione. Dalla trasformazione di Galileo infatti, non si ottiene alcuna deviazione del fronte d'onda e della direzione di propagazione (p. 175), e per spiegare l'aberrazione è necessario introdurre il concetto di "raggio" di luce, che in un sistema in movimento non coincide necessariamente con la direzione di propagazione. Nella teoria di Einstein questa difficoltà scompare: in ogni sistema inerziale S la direzione del raggio (cioè la direzione secondo cui viene trasferita l'energia) è la perpendicolare al fronte d'onda, e il fenomeno dell'aberrazione non è che una conseguenza, nell'ambito di una descrizione ondulatoria, delle trasformazioni di

Lorentz. Il che è anche valido per l'effetto Doppler e per i fenomeni di trascinamento di Fresnel.

Il metodo qui usato per arrivare alle leggi fondamentali dell'ottica dei corpi in movimento, mette in evidenza la notevole superiorità della teoria di Einstein nei confronti delle altre.

11. L'universo assoluto di Minkowski

La caratteristica essenziale della nuova cinematica è di considerare spazio e tempo come entità inseparabili; l'universo è una varietà quadridimensionale, i cui elementi sono i punti di universo. Spazio e tempo non sono che forme di ordinamento, sino a un certo grado arbitrarie, dei punti di universo. Così esprimeva Minkowski questa idea: "D'ora in avanti lo spazio e il tempo, concepiti singolarmente, vanno considerati come pure apparenze, e solo una sorta di unione dei due concetti mantiene un carattere di realtà". Si tratta di una concezione in cui la cinematica si sviluppa come una geometria in quattro dimensioni, ed è il procedimento da noi usato in precedenza, con la semplificazione dovuta all'aver trascurato le dimensioni y, z . Alcune semplici considerazioni dimostrano che la nostra geometria nel piano xt non è una geometria euclidea, dove le unità di lunghezza definite su ogni retta uscente dall'origine sono le stesse, e l'invariante fondamentale è un cerchio (fig. 133). Nel piano xt al contrario, le rette di tipo spazio e di tipo tempo non sono equivalenti; su di esse sono definite differenti unità di lunghezza e la curva di calibrazione

$$F = x^2 - c^2 t^2 = \pm 1$$

è un'iperbole.

Nella geometria euclidea la legge di trasformazione per passare da uno degli infiniti sistemi di coordinate rettangolari con origine in uno stesso punto O a un altro, è semplicemente una rotazione; nel piano xt continuano a esistere infiniti sistemi di coordinate, ma la posizione degli assi è definita, arbitrariamente, all'interno di una certa regione angolare.

Nella geometria euclidea la distanza s di un punto $P(x, y)$ dall'origine è invariante rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate (vedi formula [28], p. 98); infatti se in un sistema xy si ha, per il teorema di Pitagora (fig. 125)

$$s^2 = x^2 + y^2,$$

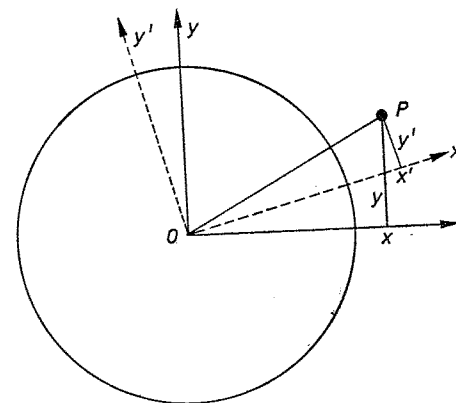


Fig. 133. L'invariante fondamentale nella geometria euclidea.

in ogni altro sistema $x'y'$, vale un'identica relazione $s^2 = x'^2 + y'^2$. L'invariante fondamentale è quindi il cerchio di raggio unitario, rappresentato dall'equazione $s = +1$.

Nel piano xt l'invariante è invece

$$F = x^2 - c^2 t^2$$

e la curva

$$F = \pm 1$$

è un'iperbole.

A questo punto si inserisce un'osservazione dovuta a Minkowski di estrema importanza per comprendere la struttura matematica dell'universo quadridimensionale (o, nel nostro caso, del piano xt);

essa consiste essenzialmente nel constatare che l'espressione

$$F = x^2 + u^2 = s^2$$

che si ottiene ponendo $-c^2t^2 = u^2$ è formalmente identica all'invariante fondamentale della geometria euclidea, nel caso di coordinate rettangolari xu .

È chiaro che da un punto di vista matematico u non ha in questo caso un significato elementare, poiché è la radice quadrata del numero negativo $-c^2t^2$; difficoltà di questo tipo sono state superate dai matematici fin dal tempo di Gauss, con l'introduzione della cosiddetta "unità immaginaria" $i \equiv \sqrt{-1}$. Non possiamo in questa sede affrontare il problema dell'introduzione rigorosa dei numeri immaginari. Questi numeri non sono affatto più "immaginari" di una frazione come $2/3$, poiché i numeri con i quali numeriamo le cose, cioè contiamo, comprendono soltanto gli interi naturali 1, 2, 3, 4 ... Il numero 2 non è divisibile per 3, cosicché $2/3$ rappresenta un'operazione altrettanto ineseguibile che $\sqrt{-1}$. Le frazioni sono un'estensione del concetto naturale di numero; però esse sono familiari grazie all'educazione e all'uso e non stupiscono nessuno. L'introduzione dei numeri immaginari è una estensione analoga; ogni espressione formata con numeri immaginari ha un significato altrettanto definito che quelle formate con numeri (reali) ordinari, e le deduzioni ricavate da esse sono altrettanto convincenti.

Servendosi del simbolo $\sqrt{-1}$, possiamo scrivere $u = ict$, stabilendo così una corrispondenza fra valori immaginari di u e tempi reali t , per cui la geometria non-euclidea nel piano xt , è formalmente identica alla geometria euclidea nel piano xu .

Ciò rappresenta un considerevole vantaggio per la trattazione matematica della teoria della relatività, dal momento che molto spesso, nei calcoli che dovremo eseguire, non saremo interessati al fatto che le quantità considerate siano reali o immaginarie, ma alle relazioni algebriche, formalmente identiche nei due casi, che le connettono.

La sostituzione di Minkowski:

$$x, y, z, u$$

al posto di

$$x, y, z, ict,$$

consente di trattare queste quattro coordinate in modo completamente simmetrico, e di trasferire le leggi della geometria euclidea all'universo quadridimensionale. Dall'espressione matematica dell'invariante fondamentale

$$F = s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

scompare quindi ogni carattere particolare della variabile tempo (il fatto cioè che il suo quadrato compaia in F col segno negativo), e ciò costituisce una semplificazione dei calcoli. Il significato fisico delle equazioni ottenute viene poi ripristinato, sostituendo di nuovo ict al posto della variabile u .

Non va dimenticato però che la trasformazione di Minkowski $u = ict$, è esclusivamente un artificio matematico utile per mettere in evidenza certe analogie formali esistenti fra coordinate spaziali e coordinate temporali; nel piano xt è chiaramente impossibile scambiare fra loro x e t , poiché le linee di luce X e Y rappresentano un confine invalicabile fra le linee di universo tipo tempo e tipo spazio.

In questo senso, dire che

$$s = \sqrt{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2},$$

rappresenta la "distanza quadridimensionale" ha soltanto un significato simbolico, già evidente d'altra parte nella nostra precedente discussione sull'invariante F . Limitando, come al solito, le nostre considerazioni al piano xt , o al piano xu , avremo

$$s = \sqrt{F} = \sqrt{x^2 + u^2} = \sqrt{x^2 - c^2t^2},$$

e quindi, per ogni linea di universo di tipo spazio F sarà positiva ed s reale. Esisterà allora un appropriato sistema di riferimento S dove il punto di universo xt sia simultaneo con l'origine, e nel quale quindi $s = \sqrt{x^2} = x$ rappresenti la distanza del punto di universo dall'origine.

Viceversa, per una linea di universo di tipo tempo, F sarà negativa ed s immaginario; in un sistema di riferimento in cui $x=0$, sarà allora $s = \sqrt{-c^2 t^2} = ict$. In ogni caso comunque s ha un semplice significato e deve essere considerata una quantità misurabile.

Possiamo ora riassumere la nostra discussione sulla teoria della relatività di Einstein affermando che: *non solo le leggi della meccanica ma tutte le leggi della fisica, in particolare quelle relative ai fenomeni elettromagnetici, sono assolutamente identiche negli infiniti sistemi di riferimento in moto relativo con velocità costante, che chiameremo sistemi inerziali. Le misure di lunghezza e di tempo, eseguite in ognuno di questi sistemi con regoli e orologi identici, conducono a risultati differenti, ma possono essere connesse fra loro mediante trasformazioni di Lorentz.*

Ciò non è più vero però se si considerano sistemi accelerati, poiché in tal caso, per l'intervento di forze centrifughe in meccanica, e di effetti analoghi in elettrodinamica, le leggi fisiche riferite a sistemi differenti si modificano. La relatività speciale non abolisce quindi il concetto newtoniano di spazio assoluto, almeno nel significato con cui questo termine è stato usato precedentemente (p. 94), e in un certo senso rappresenta una sistemazione di tutta la fisica, elettrodinamica inclusa, al livello in cui la meccanica si trovava fin dal tempo di Newton.

Vogliamo ora discutere come fu possibile a Einstein superare tutte le difficoltà, ancora irrisolte, poste dal concetto di spazio assoluto.

7.

*La teoria della relatività generale di Einstein*1. *La relatività nel caso di moti arbitrari*

Nello studio della meccanica classica abbiamo approfondito le ragioni che condussero Newton a concepire l'idea di uno spazio e di un tempo assoluti, e nello stesso tempo abbiamo messo in risalto le obiezioni che si possono muovere a queste ipotesi astratte alla luce della teoria della conoscenza.

Le idee di Newton sullo spazio assoluto si basavano sull'esistenza delle forze d'inerzia e delle forze centrifughe. È chiaro che tali forze non possono dipendere dalle interazioni fra i corpi, poiché sappiamo, nei limiti delle nostre possibilità sperimentali, che esse sono presenti in tutto l'universo, indipendentemente dalla distribuzione locale delle masse. Newton concluse quindi che esse dipendono dalle accelerazioni assolute; il concetto di spazio assoluto è così introdotto come causa fittizia di fenomeni fisici.

L'esempio seguente può mettere in evidenza questo aspetto non soddisfacente della teoria.

Supponiamo che due masse S_1 e S_2 dello stesso materiale deformabile (fluido) e di uguali dimensioni si trovino nello spazio astronomico a una distanza tale che gli effetti gravitazionali di una sull'altra siano trascurabili (fig. 134). Ogni massa si trovi in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità che una sua parte esercita sulle altre e per effetto di altri tipi di forze, in modo tale che non vi siano moti relativi fra le parti di cui è formata. Supponiamo inoltre che i due corpi ruotino con velocità costante uno rispetto all'altro intorno alla congiungente i loro centri. Questo implica per un osser-

vatore solidale con S_1 la possibilità di mettere in evidenza una rotazione uniforme di S_2 rispetto al suo sistema di riferimento, e viceversa. Supponiamo ora che ciascun osservatore determini la forma del corpo su cui si trova e che possa stabilire che S_1 è una sfera e S_2 un ellissoide di rotazione.

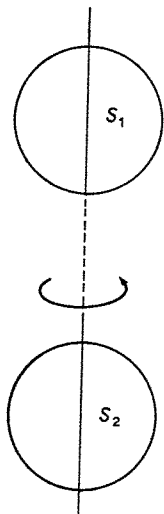


Fig. 134. Due masse di fluido, originariamente sferiche, ruotano una rispetto all'altra intorno a un asse comune.

Basandoci sulla meccanica newtoniana potremmo dedurre dalla forma dei corpi che S_1 è fermo nello spazio assoluto mentre S_2 esegue una rotazione. La deformazione di S_2 è quindi interpretabile come un effetto delle forze centrifughe.

Questo esempio illustra chiaramente come lo spazio assoluto sia introdotto nel senso di causa (fittizia) di un certo fenomeno. Infatti S_1 non può essere responsabile della deformazione di S_2 , poiché i due corpi si trovano esattamente nelle stesse condizioni e non possono quindi deformarsi in modo differente.

Ma ritenere che lo spazio sia la causa di qualche fenomeno è certamente incompatibile con un criterio di logica causale. L'ipotesi di uno spazio assoluto è giustificata soltanto dal tentativo di interpretare le forze d'inerzia, ma esse d'altra parte costituiscono l'unica indicazione della sua esistenza. Sulla base di una legittima critica epistemologica, tale ipotesi *ad hoc* è certamente inaccettabile; essa è troppo superficiale e troppo lontana dallo scopo della ricerca scientifica, che è diretta a stabilire dei criteri per distinguere i suoi risultati da ipotesi più o meno fantasiose. Se il foglio di carta su cui ho appena finito di scrivere vola improvvisamente dal tavolo, nessuno può impedirmi di pensare che sia stato portato via da un fantasma... per esempio dallo spettro di Newton. Ma alla luce del buon senso sono piuttosto portato a ritenere che qualcuno sia entrato dalla porta e si sia così creata una corrente d'aria proveniente dalla finestra aperta; tale ipotesi, anche se non mi sono accorto di questa corrente, è ragionevole perché mi permette di stabilire una relazione tra il fenomeno che voglio spiegare e altre circostanze osservabili. È infatti un atteggiamento critico nello scegliere le cause possibili che distingue il tentativo di costruire una descrizione della realtà basata sulla ragione, proprio della ricerca fisica, dal misticismo, dallo spiritualismo e da analoghe manifestazioni dell'immaginazione incontrollata.

Il concetto di spazio assoluto mantiene appunto un certo carattere "metafisico". Alla domanda "qual è la causa delle forze centrifughe?" la nostra risposta è "lo spazio assoluto"; ma se si cerca di capire in che cosa consista lo spazio assoluto e in quale altro modo sia possibile definirlo, non vi è altra risposta che ripetere "lo spazio assoluto è la causa delle forze centrifughe", senza poter aggiungere ulteriori proprietà. Queste considerazioni dimostrano che l'idea di uno spazio come "causa" è incompatibile con una descrizione scientifica della realtà.

Non è forse superfluo ricordare che questa idea di uno spazio assoluto non è in alcun modo modificata dall'esistenza di fenomeni elettromagnetici. In un sistema di coordinate in rotazione si osser-

vano effetti analoghi a quelli delle forze centrifughe della meccanica. Ma questo naturalmente non rappresenta una nuova e indipendente prova dell'esistenza di uno spazio assoluto, perché, come abbiamo visto, il teorema dell'inerzia dell'energia permette di studiare in modo unitario fenomeni meccanici ed elettromagnetici. Se facciamo riferimento esclusivamente ai concetti della meccanica, è solo per ragioni di convenienza.

Ritorniamo ora alle due masse S_1 ed S_2 . Se non accettiamo l'idea che lo spazio sia la causa delle loro differenti forme, dobbiamo aspettarci che intervengano delle ragioni diverse e più convincenti.

Supponiamo che nello spazio non vi siano altri corpi all'infuori delle due masse S_1 ed S_2 ; in tal caso, il fatto che esse abbiano forme diverse è effettivamente inspiegabile, per cui è spontaneo chiedersi se tale differenza possa essere verificata sperimentalmente. Ma senza dubbio la risposta è *negativa*: è impossibile infatti pensare a un esperimento in cui si osservino due corpi isolati nell'universo. L'ipotesi che in tali circostanze le due masse si comportino in modo differente, non può quindi essere convalidata da *alcuna evidenza sperimentale*. Al contrario, una esauriente teoria dei fenomeni meccanici deve escludere una simile possibilità. D'altra parte se ci riferiamo al caso di due masse reali S_1 ed S_2 (è noto che i pianeti sono più o meno schiacciati) possiamo pensare che il differente comportamento a cui abbiamo accennato sia semplicemente dovuto alla presenza nello spazio di *masse distanti*. Nell'universo tali masse esistono effettivamente e costituiscono le innumerevoli legioni di stelle. Attorno ad ognuna di esse e anche a distanze considerevoli ne esistono sempre moltissime altre in moto l'una rispetto all'altra con velocità così lente che tutto l'insieme può essere considerato come un solido cavo, nel cui interno sia situato il corpo in considerazione.

L'idea che l'insieme delle masse distanti possa essere la causa delle forze centrifughe fu espressa per la prima volta dal filosofo e fisico Ernst Mach, i cui scritti esercitarono una profonda influenza sul pensiero di Einstein. Tale ipotesi non è contraddetta da alcun fatto sperimentale, perché in astronomia il sistema di riferimento

rispetto al quale si determinano le rotazioni dei corpi celesti è in uno stato di quiete relativo al sistema stellare considerato globalmente. Più precisamente, il sistema di riferimento è scelto in modo tale che i moti apparenti delle stelle fisse rispetto ad esso siano del tutto irregolari e non avvengano in una direzione privilegiata. Lo schiacciamento di un pianeta è tanto maggiore, quanto maggiore è la sua velocità di rotazione relativa a questo sistema di riferimento solidale con le masse distanti.

Ne segue quindi che le leggi della meccanica, e in generale qualsiasi teoria fisica, dovranno coinvolgere soltanto posizioni e moti relativi dei corpi. Nessun sistema di riferimento può essere favorito a priori, come i sistemi inerziali nella meccanica newtoniana e nella relatività speciale di Einstein; se così non fosse, le leggi della fisica coinvolgerebbero anche accelerazioni assolute relative al sistema privilegiato, e non soltanto moti relativi dei corpi.

Possiamo concludere quindi che le leggi fisiche debbono rimanere inalterate, qualunque sia il moto del sistema di riferimento considerato. Ciò rappresenta una considerevole estensione del principio di relatività.

2. Il principio di equivalenza

Questo postulato richiede una formulazione completamente nuova della legge d'inerzia, poiché è proprio tale legge che conferisce un carattere di privilegio ai sistemi inerziali. L'inerzia di un corpo non deve più essere considerata un effetto dello spazio assoluto, quanto una conseguenza delle masse distanti.

L'unico tipo di interazione fra corpi materiali che noi conosciamo è l'attrazione gravitazionale, e gli esperimenti ci hanno dimostrato che esiste un notevole legame fra gravità e inerzia, espresso dall'uguaglianza fra massa gravitazionale e massa inerziale (p. 60). Abbiamo potuto vedere cioè che esiste una radice comune fra i due fenomeni dell'inerzia e dell'attrazione, che nella formulazione newtoniana sembrano così distanti fra loro.

In ciò consiste appunto la grande scoperta di Einstein, che ha trasformato il principio di relatività da postulato epistemologico in legge di una scienza esatta.

Possiamo caratterizzare l'oggetto del nostro ragionamento in questo modo: nella meccanica ordinaria il moto di un corpo (su cui non agiscano forze elettromagnetiche o di altro tipo) è generato da due cause: 1) la sua inerzia, cioè la resistenza alle accelerazioni rispetto allo spazio assoluto; 2) l'attrazione esercitata dalle masse circostanti. Ciò che ci proponiamo di trovare è una formulazione della legge del moto in cui inerzia e gravitazione si fondano in un unico concetto di carattere più generale, e in cui il moto di un corpo sia dovuto esclusivamente alla distribuzione di tutte le masse dell'universo. La strada per arrivare a questa nuova legge può essere in un certo senso prolissa, ma è certamente necessaria per superare alcune difficoltà concettuali.

Discuteremo innanzitutto la legge di uguaglianza fra massa gravitazionale e massa inerziale. Essa afferma che ogni corpo sulla terra cade con uguale accelerazione, e che, nei moti dei corpi celesti, l'accelerazione non dipende dalla massa del corpo in movimento. Abbiamo già ricordato che per quanto le misure di Eötvös ne avessero confermato con estrema precisione la validità, ciò nonostante essa non era considerata come una legge fondamentale della meccanica classica, ma veniva accettata, per così dire, come un dono casuale della natura.

Il nostro atteggiamento è ora completamente diverso. Questa legge ha un ruolo fondamentale non soltanto nella meccanica, ma in tutta la fisica. Cercheremo quindi di darne una spiegazione da cui emerga chiaramente il suo profondo significato. Invitiamo il lettore a compiere questo semplice esperimento: prenda due oggetti leggeri e di peso differente, per esempio una moneta e un pezzo di gomma, sul palmo di una mano; egli percepirà tale differenza di peso come una diversa pressione esercitata dai due corpi. Abbassando poi rapidamente la mano, potrà constatare una diminuzione di questa pressione, finché, ripetendo sempre più velocemente questo

movimento, arriverà ad un istante in cui i corpi non saranno più sostenuti dal palmo e non ne seguiranno più il moto. Ciò avverrà naturalmente non appena il movimento della mano verso il basso raggiungerà una velocità maggiore della velocità di caduta libera dei corpi. Ora, poiché questi cadono con uguale velocità nonostante la loro differenza di peso, i due oggetti si troveranno sempre alla stessa altezza, anche senza essere più in contatto con la mano.

Ammettiamo ora, per assurdo, che sulla superficie della mano vivano dei diavoletti del tutto all'oscuro delle cose di questo mondo e chiediamoci quale sia il loro giudizio sull'intero processo. Possiamo sempre immaginare noi stessi al posto di questi piccoli osservatori in moto con la mano, mentre eseguiamo l'esperimento e poniamo attenzione alla variazione di pressione e di moto dei corpi rispetto alla mano. È chiaro che se la mano è ferma, i nostri diavoletti affermeranno che i pesi dei due corpi sono differenti, e successivamente, quando la mano si abbassa, noteranno una diminuzione del peso degli oggetti. Per trovare una spiegazione a questo fatto, essi osserveranno che la loro posizione, cioè la mano, si abbassa rispetto ai corpi circostanti, per esempio rispetto alle pareti della stanza. Nulla ci vieta però di rinchiudere in una scatola i diavoletti e i due corpi e di fare in modo che essa compia un moto verso il basso insieme alla mano. In tal caso gli osservatori non avranno alcun riferimento per mettere in evidenza il movimento della scatola e potranno osservare semplicemente che i pesi dei corpi diminuiscono in un medesimo rapporto. Se poi supponiamo che la mano si muova così rapidamente che gli oggetti non riescano più a seguirla ma procedano di moto libero, gli osservatori rinchiusi nella scatola si accorgeranno con stupore che i corpi, dotati fino a quel momento di un certo peso, volano verso l'alto. Essi acquistano quindi un peso "negativo", o meglio, l'attrazione gravitazionale non agisce più verso il basso ma verso l'alto; inoltre, nonostante la loro differenza di peso, i due corpi "cadono" verso l'alto con velocità uguali. Queste osservazioni possono essere interpretate dai nostri esseri ipotetici in due modi differenti: essi possono ritenere che il campo gravitazionale

continui ad agire inalterato ma che la scatola subisca un'accelerazione nella direzione del campo, oppure che le masse esistenti sotto la scatola e che in precedenza esercitavano una forza attrattiva siano state sostituite da nuove masse situate sopra la scatola e quindi tali da invertire il verso della retta d'azione del campo gravitazionale.

Purtroppo però in fisica non si conosce alcun modo per fare una distinzione, da un punto di vista sperimentale, fra queste due possibilità. Non è possibile stabilire una differenza tra gli effetti della gravità e gli effetti dovuti all'accelerazione: essi sono del tutto equivalenti fra loro. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che tutti i corpi cadono con uguale velocità, perché se così non fosse, sarebbe sempre possibile capire se un moto accelerato di corpi di peso differente è prodotto dall'accelerazione di masse esterne o se non è altro che un'illusione, dovuta all'accelerazione del punto di appoggio dell'osservatore. Nel primo caso, corpi di peso differente avrebbero velocità diverse; nel secondo, l'accelerazione relativa di tutti i corpi in caduta libera rispetto all'osservatore sarebbe uguale ed essi cadrebbero con la stessa velocità nonostante la loro differenza di peso.

Questo principio, che va sotto il nome di *principio di equivalenza* di Einstein, è un esempio di quella classe di teoremi, a cui abbiamo dato particolare attenzione in questo libro, che affermano l'impossibilità di dimostrare un certo enunciato, o di scegliere fra due concetti differenti. Poiché solo ciò che è suscettibile di verifica ha un concreto significato fisico, concetti ed enunciati di questo tipo non sono accettati in fisica e devono essere sostituiti.

In meccanica classica si fa distinzione fra il moto di un corpo non soggetto a forze (moto inerziale) e il moto di un corpo sottoposto all'azione del campo gravitazionale: il primo è rettilineo e uniforme in un sistema inerziale, il secondo non è uniforme e ha una traiettoria curvilinea. In base al principio di equivalenza tale distinzione dev'essere abbandonata; è chiaro infatti che è sufficiente passare a un sistema di riferimento accelerato perché il moto rettilineo e uniforme si trasformi in un moto curvo e accelerato, del tutto indistinguibile dal moto dovuto all'attrazione gravitazionale.

Come vedremo più chiaramente in seguito, anche l'inverso è valido, almeno per un intervallo limitato del moto.

Chiameremo d'ora in poi moto inerziale qualsiasi moto di un corpo su cui non agiscano forze elettriche, magnetiche o di altro tipo, e che si trovi esclusivamente sotto l'azione delle masse gravitazionali: in questo senso esso ha un significato più generale che in precedenza.

Il teorema che un moto inerziale relativo a un sistema inerziale è rettilineo e uniforme, cioè il principio di inerzia, perde ora qualsiasi significato, e sarà necessario quindi stabilire una formulazione più generale della legge dei moti inerziali.

La soluzione di questo problema ci porterà ad abbandonare il concetto di spazio assoluto e nello stesso tempo consentirà di arrivare a una *teoria della gravitazione* più intimamente legata ai principi della meccanica di quanto non fosse la teoria di Newton.

Vogliamo aggiungere ora a queste osservazioni alcune considerazioni di carattere quantitativo. Abbiamo già visto (p. 103) che le equazioni del moto della meccanica, riferite a un sistema S dotato di un'accelerazione costante k rispetto ad un sistema inerziale, possono essere scritte nella forma

$$ma = F'$$

dove F' è la somma della forza effettiva F e della forza inerziale $-mk$, cioè

$$F' = F - mk.$$

Se F è la forza di attrazione gravitazionale, cioè $F = mg$, sarà

$$F = m(g - k).$$

Una scelta appropriata dell'accelerazione k del sistema di riferimento S ci consentirà quindi di far assumere alla differenza $g - k$ un qualsiasi valore positivo, negativo o nullo. Se, analogamente a ciò che si fa in elettrodinamica, chiamiamo *intensità del campo gra-*

vitazionale la forza agente sull'unità di massa, e *campo gravitazionale* lo spazio in cui essa agisce, possiamo affermare che scegliendo appropriatamente il sistema accelerato, è possibile creare un campo gravitazionale costante, e fare in modo che la sua intensità diminuisca, aumenti o si annulli.

È chiaro che in una porzione dello spazio sufficientemente limitata e in un intervallo di tempo abbastanza piccolo, qualsiasi campo gravitazionale potrà essere considerato approssimativamente costante. Potremo sempre trovare quindi un sistema di riferimento accelerato rispetto al quale non esista un campo gravitazionale, almeno per una regione limitata dello spazio-tempo.

È possibile allora eliminare completamente e per un tempo illimitato qualsiasi campo gravitazionale, con la semplice scelta di un riferimento appropriato? In altri termini, possiamo ritenere che la gravità sia in qualche modo "apparente"? È chiaro che le cose non vanno in questo modo: il campo gravitazionale terrestre, per esempio, non potrà essere eliminato completamente. Esso è infatti diretto verso il centro della terra, e l'accelerazione del sistema dovrebbe avere un'identica direzione. Ciò è ovviamente possibile soltanto per brevi intervalli di tempo, anche se si ammette (ed è quanto dovremo fare) che il sistema di riferimento non sia rigido ma si contragga per effetto di un'accelerazione attorno al centro. Una rotazione del sistema attorno a un asse genera una forza inerziale, la forza centrifuga, in direzione uscente a tale asse (p. 107, formula [31]), il cui valore è dato da

$$mk = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Questa forza può compensare il campo terrestre per un tempo T solo per una distanza uguale a r ; ad esempio, se T è il periodo di rivoluzione della luna, per r uguale al raggio dell'orbita lunare supposta circolare.

Potremo quindi parlare di campi gravitazionale "reali", anche se questo termine assume in relatività generale un significato diverso

da quello che ha nella meccanica classica, dal momento che una scelta appropriata del riferimento ci consente sempre di annullare il campo in una piccola regione dello spazio. Daremo in seguito una più accurata definizione di campo gravitazionale.

Esistono naturalmente campi che possono essere del tutto eliminati scegliendo un sistema di riferimento adatto. A questo scopo basta considerare inizialmente un sistema di riferimento in cui una regione dello spazio non risenta degli effetti del campo, e quindi introdurre un nuovo riferimento dotato di una certa accelerazione: il campo gravitazionale esistente rispetto a questo sistema scompare non appena si torni al riferimento di partenza. Il campo centrifugo $k = (4\pi^2 r)/T^2$ è appunto di questo tipo. Il problema di trovare le condizioni per cui un campo gravitazionale possa essere completamente annullato, può essere risolto naturalmente solo da una teoria veramente completa.

3. Insufficienza della geometria euclidea

Dobbiamo ora affrontare, prima di procedere nello sviluppo della teoria, un problema di non lieve entità.

Abbiamo imparato a rappresentare il moto come una linea nell'universo di Minkowski. La struttura di questa geometria quadridimensionale è costituita dalle linee di universo dei raggi di luce o dalle orbite del moto libero delle masse inerziali. Queste linee di universo, nella vecchia teoria, erano delle rette rispetto ai sistemi inerziali. Ma nell'ambito della relatività generale vi è una completa equivalenza fra sistemi in moto accelerato, ed è chiaro che in essi le linee di universo non saranno più rette ma curve (p. 78, fig. 32, *a-f*); a loro volta altre linee d'universo divengono rette. Un'analoga modificazione si avrà d'altra parte anche per le orbite spaziali. I concetti di "retta" o "curva", riferiti ai cammini dei raggi luminosi e alle orbite dei corpi liberi, vengono così ad assumere un significato relativo.

Da ciò deriva un effettivo indebolimento della geometria eucli-

dea, poiché essa è costruita essenzialmente (vedi p. 76) sulla legge d'inerzia, che è strettamente associata al concetto di retta.

Si potrebbe pensare di superare questa difficoltà usando regoli rigidi per definire gli enti geometrici linea, piano ecc.; ma ciò è impossibile, com'è evidente dalla seguente dimostrazione di Einstein: consideriamo una regione spatio-temporale in cui, durante un certo intervallo di tempo e per una scelta appropriata del sistema di riferimento S , sia assente ogni effetto della gravità, e supponiamo che in questa regione un disco piano circolare (fig. 135) ruoti con velocità

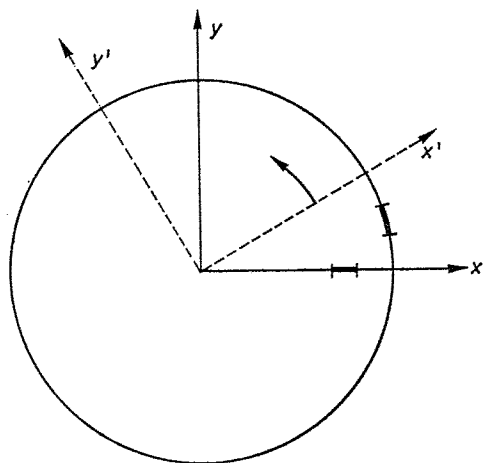


Fig. 135. Un disco circolare ruota rispetto al sistema $S(x, y)$; solidale con esso è il sistema $S'(x', y')$. In figura sono anche rappresentati due piccoli regoli campione, uno nella direzione del raggio e l'altro nella direzione della tangente al disco.

costante attorno a un asse perpendicolare. In un sistema di riferimento S' , solidale col disco, esisterà allora un campo gravitazionale, diretto radialmente verso l'esterno, dovuto all'accelerazione centrifuga

$$k = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Supponiamo ora che un osservatore situato su S' voglia misurare le dimensioni del disco, e si serva per questo di un regolo campione di lunghezza nota, a riposo rispetto ad S' , e che un altro osservatore, solidale col riferimento S , usi come unità di misura un identico regolo, naturalmente a riposo rispetto ad S .

Facciamo inoltre l'ipotesi che i risultati della relatività speciale continuino a valere per una limitata regione spatio-temporale in cui il moto possa essere considerato uniforme, e a questo scopo assumiamo che il regolo campione sia piccolo rispetto al raggio del disco.

Se l'osservatore situato in S' dispone il suo regolo lungo il raggio del disco, l'osservatore in S noterà che la lunghezza del regolo in moto rispetto al riferimento S non cambia e rimane uguale, per esempio, a 1 centimetro; il moto del regolo avviene infatti in direzione perpendicolare alla sua lunghezza. Se invece l'osservatore in S' dispone il regolo sul contorno del disco, allora, secondo la relatività speciale, esso apparirà contratto all'osservatore in S . Supposto che per coprire la lunghezza totale del diametro siano necessari 100 piccoli regoli, l'osservatore situato in S avrà bisogno di $\pi \cdot 100$, cioè circa 314 regoli a riposo rispetto ad S , per misurare il perimetro del disco. Essi saranno però insufficienti per l'osservatore in S' , poiché i regoli a riposo in S' appariranno contratti all'osservatore in S , e non ne basteranno 314 per ricoprire tutto il perimetro.

Ne segue quindi che per l'osservatore situato in S' il rapporto fra circonferenza e raggio del cerchio è superiore a 3,14; detto rapporto aumenta all'aumentare di r , poiché il campo gravitazionale è proporzionale al raggio. Tutto ciò è naturalmente in contraddizione con la geometria euclidea.

Risultati analoghi si ottengono anche per le misure di tempo. Supponiamo che un certo numero di orologi, sincronizzati fra loro, siano a riposo rispetto al sistema S e che altri, d'identica costruzione, si trovino su un raggio del disco rotante, e siano quindi a riposo rispetto ad S' . Un confronto fra gli orologi sul disco e gli altri dimostra allora che per i primi il tempo scorre più lentamente, e che la

differenza fra le due misure aumenta proporzionalmente alla distanza dal centro. Soltanto l'orologio posto nel centro del disco è sincrono con gli orologi posti in S' , poiché la sua velocità rispetto ad S è nulla.

Va osservato inoltre che gli stessi orologi solidali al disco non possono essere sincronizzati fra loro, dal momento che per essi il tempo scorre più lentamente che per gli orologi posti in S , a seconda della loro distanza dal centro. Dovremo concludere quindi che per un sistema di riferimento in rotazione, cioè per un sistema accelerato o per un sistema situato in un campo gravitazionale (ciò che è lo stesso, secondo il principio di equivalenza), non è possibile giungere a una definizione ragionevole del tempo servendosi di orologi a riposo rispetto ad esso. In un campo gravitazionale un regolo è più lungo o più corto e le lancette di un orologio camminano più o meno lentamente a seconda della posizione che questi strumenti occupano nel campo.

Crollano così le basi della teoria dell'universo spazio-temporale, su cui avevamo costruito tutte le nostre precedenti argomentazioni, mentre si fa sempre più viva l'esigenza di arrivare a una generalizzazione dei concetti di spazio e tempo che superi radicalmente tutti i nostri precedenti tentativi.

È ormai evidente che la definizione comune di coordinate spaziali e temporali x , y , z e t , non ha alcun significato poiché in essa sono impliciti i concetti geometrici fondamentali di retta, piano, cerchio ed è accettata la validità della geometria euclidea nello spazio, o della sua generalizzazione all'universo spazio-temporale dovuta a Minkowski.

Si tratta allora di trovare una descrizione dell'universo quadridimensionale e delle sue leggi che non accetti a priori una base geometrica definita.

Ora sembra che ci manchi il terreno sotto i piedi: tutto vacilla, le rette divengono curve e le curve divengono rette. Einstein non fu certo frenato dalle difficoltà di questa impresa. Già da tempo alcuni matematici avevano portato a termine studi d'estrema importanza su tali argomenti: Gauss (1827) aveva elaborato una teoria delle

superfici curve in termini di una geometria bidimensionale e Riemann (1854) l'aveva estesa a una varietà continua a infinite dimensioni. La teoria era poi stata successivamente sviluppata da altri, fra cui Christoffel, Ricci e Levi-Civita. Non possiamo qui soffermarci sull'uso di questi mezzi matematici, anche se senza di essi è impossibile arrivare a una comprensione veramente profonda dei principi della relatività generale. Il lettore non deve attendersi quindi una trattazione esauriente delle idee di Einstein, ma una serie di descrizioni e analogie che rappresentano sempre una modesta sostituzione dei concetti esatti. Lo scopo principale di questi brevi cenni è tuttavia quello di stimolare nel lettore il desiderio di uno studio più approfondito.

4. *La geometria delle superfici curve*

Il problema di costruire una geometria in cui non esista il concetto di linea retta e non si basi, come la geometria euclidea, su un insieme di assiomi e di teoremi dati a priori, non è così estraneo alla nostra realtà come potrebbe sembrare a prima vista. Pensiamo per esempio a un topografo che voglia disegnare la mappa di un terreno collinare, coperto da una fitta boscaglia; poiché da ogni punto egli non può vedere che una zona limitata della regione circostante, non avrà alcuna utilità a usare un teodolite, ma dovrà ricorrere a una catena metrica. Questa gli consente di misurare una serie di piccoli triangoli o quadrilateri i cui vertici siano costituiti da paletti conficcati nel terreno e nel collegare fra loro tali figure misurabili *direttamente* in modo che sia possibile procedere verso le zone più distanti del bosco altrimenti inaccessibili.

In termini più generali, possiamo dire che il topografo si serve dei metodi della geometria euclidea soltanto per piccole regioni di terreno, e non per tutta la zona collinosa, che può rilevare solo in modo graduale procedendo da una regione all'altra. La geometria euclidea non è lo strumento più idoneo per lo studio di un territorio collinoso, dal momento che si tratta di una superficie in cui non esistono linee

rette. Soltanto piccoli tratti della catena metrica possono essere considerati rettilinei, ma sarebbe impossibile pensare di congiungere due valli o due colline con una linea retta. La geometria euclidea vale quindi solo nel limite di dimensioni estremamente piccole, mentre lo studio di regioni più vaste richiede l'introduzione di una teoria delle superfici di validità più generale.

Procedendo in modo sistematico, il topografo dovrà innanzitutto tracciare sul terreno boscoso due famiglie di linee intersecantesi fra loro (fig. 136) contrassegnate da pali o alberi scelti come riferimento.

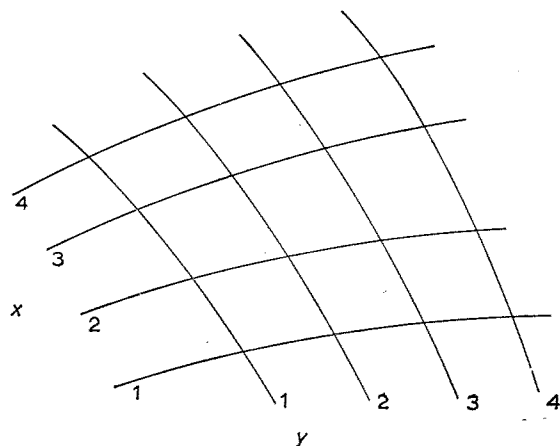


Fig. 136. Due famiglie di curve intersecantesi individuano un sistema di coordinate curvilinee su di una superficie.

Queste linee, che devono curvarsi per quanto possibile in modo lento e continuo, saranno indicate all'interno di ogni famiglia da un numero progressivo. Indichiamo con x e y le linee dei due insiemi di curve.

Ogni punto d'intersezione è così caratterizzato da due numeri x e y , per esempio $x=3$ e $y=5$; naturalmente per punti intermedi si potranno anche usare valori frazionari. Questo metodo per individuare un

punto su una superficie curva fu utilizzato per la prima volta da Gauss e x e y si chiamano quindi *coordinate gaussiane*.

La caratteristica principale delle coordinate x e y è che esse non rappresentano lunghezze o angoli o una qualsiasi altra quantità misurabile geometricamente, ma sono semplicemente dei numeri, come nel sistema americano di numerare le strade e le case.

Il compito del topografo è ora quello di servirsi di questo schema per misurare un punto sul terreno. La sua catena metrica comprende circa una rete dell'intero sistema formato dalle coordinate gaussiane.

In seguito egli procederà a misurare progressivamente ogni rete, ognuna delle quali può essere considerata come un piccolo parallelogramma ed è completamente individuata dalla conoscenza di due lati e dell'angolo compreso; il topografo dovrà misurarli per ogni rete e riportarli sulla sua carta. Ripetendo questo procedimento per tutte le reti si otterrà infine una descrizione completa della geometria del terreno.

Invece di misurare queste tre grandezze per ogni rete (due lati e un angolo), si preferisce di solito un metodo che ha il vantaggio di una maggiore simmetria.

Supponiamo che i due lati di un parallelogramma corrispondano a due interi consecutivi (per esempio $x=3$, $x=4$, e $y=7$, $y=8$) (fig. 137); sia P un punto interno ad esso ed s la sua distanza dal vertice O più vicino che dovrà essere riportato nel rilievo topografico.

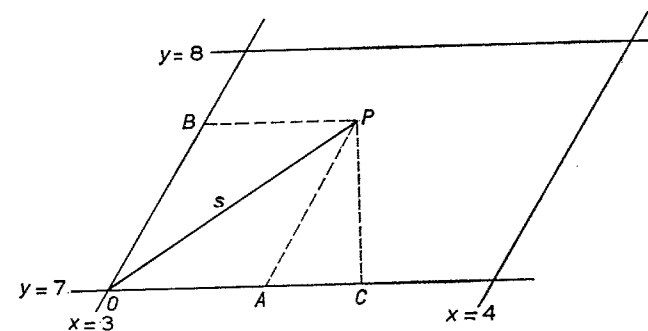


Fig. 137. Generalizzazione del teorema di Pitagora.

Condotte per P le parallele ai lati, siano A e B i punti di intersezione e C il piede della perpendicolare condotta da P all'asse x .

Naturalmente anche i punti A e B saranno caratterizzati da un valore delle coordinate gaussiane. A può essere determinato per esempio misurando il lato del parallelogramma su cui si trova e la distanza AO , e considerando il rapporto fra queste due lunghezze come l'incremento della coordinata x di A a partire dal punto O . Chiamiamo ξ questo incremento e scegliamo O come origine del sistema di coordinate. Allo stesso modo determiniamo la coordinata η del punto B ; ξ ed η sono quindi le coordinate gaussiane di P rispetto a O . Se x e y sono i numeri che caratterizzano O , cioè le sue coordinate rispetto a un'origine fissata arbitrariamente, ξ ed η possono essere considerati come piccoli incrementi di x e y .

Naturalmente la lunghezza effettiva del segmento \overline{OA} non è ξ ma, per esempio, $a \cdot \xi$ dove a è una quantità che deve essere determinata con una misurazione; allo stesso modo la lunghezza effettiva di \overline{OB} non è η ma $b \cdot \eta$. Se il punto P si muove, le sue coordinate gaussiane cambiano, mentre i numeri a e b che definiscono i rapporti fra le coordinate gaussiane e le lunghezze effettive rimangono invariati.

Esprimiamo ora la distanza $\overline{OP}=s$ servendoci del teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OPC ; è

$$s^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CP}^2.$$

Poiché $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$, avremo

$$s^2 = \overline{OA}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2.$$

D'altra parte, considerando il triangolo rettangolo APC , potremo scrivere

$$\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2,$$

e quindi

$$s^2 = \overline{OA}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{AC} + \overline{AP}^2.$$

In questa relazione $\overline{OA} = a \cdot \xi$, $\overline{AP} = \overline{OB} = b \cdot \eta$, AC è in un rapporto

costante con AP , di cui è la proiezione, e quindi $AC = c \cdot \eta$. Possiamo scrivere allora

$$s^2 = a^2 \xi^2 + 2ac \xi \eta + b^2 \eta^2,$$

dove a , b , c sono numeri noti. Questa equazione, che di solito si scrive in una forma leggermente diversa

$$s^2 = g_{11} \xi^2 + 2g_{12} \xi \cdot \eta + g_{22} \eta^2 \quad [97]$$

esprime in un certo senso il *teorema di Pitagora generalizzato* al caso di coordinate gaussiane.

Le tre quantità g_{11} , g_{12} , g_{22} , che caratterizzano la posizione di un punto nel parallelogramma esattamente come i due lati e l'angolo, saranno chiamati in seguito *coefficienti metrici* e la quantità s^2 , data dalla [97], *metrica della superficie*. I coefficienti metrici hanno valori differenti per ogni rete e sono funzioni matematiche delle coordinate gaussiane x ed y . Nel caso in cui si conoscano i valori corrispondenti ad ogni rete, la [97] consente di calcolare la distanza effettiva di un punto P , situato in una rete qualsiasi, dall'origine, purché siano note le sue coordinate x e y .

I coefficienti metrici individuano così l'intera geometria della superficie.

Ma, osservando che le coordinate gaussiane e di conseguenza i coefficienti g_{ik} sono stati scelti in modo del tutto arbitrario, si potrebbe dubitare della validità di questa affermazione. È vero infatti che potremmo sempre scegliere un differente sistema di coordinate e ottenere la distanza fra gli stessi punti O e P in funzione di nuovi coefficienti g'_{11} , g'_{12} , g'_{22} . Esistono però delle formule di trasformazione fra le g_{ik} e le g'_{ik} , simili a quelle che abbiamo ricavato in precedenza.

Ogni ente geometrico definito sulla superficie dev'essere espresso da una formula identica qualunque sia il sistema di coordinate scelto: dev'essere cioè un invariante. In questo senso la geometria delle superfici è una teoria degli invarianti di tipo assolutamente generale, con l'unica condizione che l'insieme di coordinate sia for-

mato da curve continue e ricopra la superficie senza interruzioni e senza che alcun punto sia attraversato due volte.

Una volta definita la metrica, vediamo ora qual è il problema geometrico che il topografo deve risolvere. Su di una superficie curva non esistono linee rette; esistono però delle linee che approssimano in *maggior misura* una retta e nello stesso tempo individuano il percorso più breve fra due punti. In matematica esse si chiamano "geodetiche" e sono caratterizzate nel modo seguente: supponiamo di dividere in parti misurabili di lunghezze s_1, s_2, s_3, \dots una qualsiasi linea su una superficie; la somma

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

relativa a tutte le congiungenti i due punti P_1 e P_2 , ha un minimo in corrispondenza della geodetica (fig. 138). Le quantità s_1, s_2, \dots possono essere determinate dal teorema di Pitagora generalizzato [97] noti i coefficienti g_{11}, g_{12}, g_{22} .

Su una superficie sferica, per esempio, le geodetiche coincidono con i cerchi massimi, cioè con le sezioni dei piani passanti per il centro. Su altre superfici esse sono spesso di forma molto complicata, ma rappresentano comunque le curve più semplici e gli elementi principali della loro struttura geometrica, esattamente come le rette sono la base della geometria euclidea del piano.

Dal punto di vista matematico le geodetiche sono ovviamente degli invarianti e la loro conoscenza, che caratterizza completamente le proprietà geometriche della superficie, è sufficiente per costruire qualsiasi altro invariante. Uno studio approfondito di tali problemi esula però dai nostri scopi.

Un'altra proprietà fondamentale di una superficie è la sua *curvatura*, che è definita generalmente ricorrendo alla terza dimensione spaziale. La curvatura di una sfera per esempio è misurata in funzione del raggio, cioè della distanza tra un punto sulla superficie e un punto, il centro, non appartenente ad essa.

Una tale definizione però non potrebbe certamente essere utile al topografo dell'esempio precedente: è chiaro infatti che egli non

può abbandonare la superficie su cui si trova, ed è in grado di eseguire una misura della curvatura servendosi soltanto della sua catena metrica. Gauss dimostrò che ciò è effettivamente possibile e le considerazioni che seguono serviranno a chiarire in modo semplice la sua idea: con dodici fili di lunghezza uguale si formi un esagono regolare con le sue sei congiungenti i vertici col centro (fig. 139).



Fig. 138. Confronto fra una geodetica e una curva arbitraria.

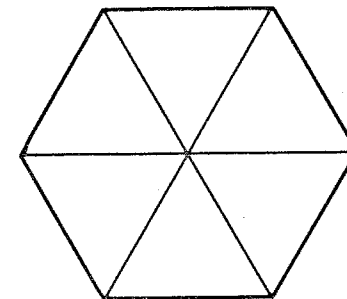


Fig. 139. Metodo dell'esagono per determinare la curvatura intrinseca di una superficie.

Secondo un ben noto teorema di geometria piana, quando tutti i fili sono tesi simultaneamente, la figura ottenuta individua un piano. Questa circostanza è realmente piuttosto notevole, poiché ci dice che se si tendono i lati di cinque dei sei triangoli equilateri, anche l'ultimo lato è automaticamente teso fra i suoi estremi.

Ciò vale rigorosamente solo nella geometria piana; se ripetessimo lo stesso procedimento su di una superficie curva, lasciando fissi il centro e i sei vertici l'esagono non si chiuderebbe. Sulla sommità di una collina e nella depressione di una valle, l'ultimo filo sarebbe troppo lungo; su un valico che colleghi una regione più bassa ad un'altra posta fra due alture (dove la superficie ha la forma di una sella) esso sarebbe troppo corto.

Esiste quindi un criterio sperimentale per stabilire la curvatura di una superficie, senza dover ricorrere a un riferimento esterno ad

essa: se l'ultimo filo completa l'esagono, la superficie sarà piana, altrimenti si tratterà di una superficie curva. Senza entrare nei particolari di tale procedimento, quanto abbiamo detto finora è sufficiente a dimostrare che una simile misura può essere definita rigorosamente. Essa dipenderà dalla variazione dei coefficienti metrici in funzione del punto, e anzi, com'è stato dimostrato da Gauss, tale *misura della curvatura* può essere espressa in funzione delle g_{ik} ed è un invariante della superficie indipendente dalla scelta del sistema gaussiano.

La teoria delle superfici di Gauss è un metodo geometrico che potremmo definire, con un termine preso in prestito dalla fisica, una *teoria per contatto*. In essa non hanno un ruolo essenziale le proprietà geometriche macroscopiche di una superficie, quanto le sue proprietà differenziali (cioè quelle che si riferiscono a regioni infinitesime): i coefficienti metrici e gli invarianti che si possono formare con essi, primo fra tutti la misura della curvatura. Con calcoli molto simili a quelli che s'incontrano in fisica nella risoluzione di equazioni differenziali, è possibile poi determinare la forma della superficie e le sue proprietà geometriche generali. La geometria euclidea è al contrario una tipica teoria di azione a distanza. Ciò spiega perché nella fisica moderna, interamente costruita sull'idea di azione per contatto e sul concetto di campo, la geometria euclidea si sia rivelata insufficiente e si sia sviluppato un indirizzo più vicino alle idee di Gauss.

5. Il continuo bidimensionale

Supponiamo che il nostro topografo voglia misurare la curvatura di un terreno servendosi del metodo dell'esagono, e che non ponga alcuna attenzione al fatto che gli estremi dei fili convergenti al centro dell'esagono siano esposti ai raggi del sole. I sei fili radiali risulteranno allora più lunghi degli altri, perché dilatati dal calore, e l'esagono non potrà più chiudersi. Quindi, anche se il terreno è in piano, il topografo crederà di trovarsi sulla sommità di una col-

lina o al fondo di una valle. D'altra parte, se si vuole eseguire una misura accurata, l'intero procedimento dovrà essere ripetuto con fili di materiale differente e questi sotto l'azione del calore solare subiranno un allungamento maggiore o minore dei precedenti; in questo modo il topografo potrà accorgersi dell'errore e cercare di correggerlo.

Se, per ipotesi, tutti i materiali con cui si possono realizzare dei fili, subissero un'identica dilatazione termica, l'errore non potrebbe mai essere scoperto e il topografo confonderebbe una pianura con una collina o viceversa. Analogamente, se esistessero forze sconosciute capaci di modificare la lunghezza dei fili sempre nell'identica misura, la struttura geometrica individuata dal topografo con la sua catena metrica e col poligono di fili, non coinciderebbe con la geometria reale della superficie in esame. Qualsiasi ripetizione della misura, una volta esclusa la possibilità di ricorrere alla terza dimensione spaziale, non potrà che confermare l'opinione di aver determinato la corretta geometria del terreno.

Queste considerazioni dimostrano che il concetto di geometria su di una superficie, o, secondo l'espressione di Gauss, la "*geometria intrinseca*", non è in alcun modo connesso al tipo di superficie che appare a un osservatore posto su un punto estraneo ad essa. La struttura geometrica della superficie è completamente individuata *in relazione* all'unità di lunghezza adottata, al sistema di coordinate gaussiane scelto e alla metrica, quali che siano le variazioni che possono accadere in pratica durante il processo di misura. Tali variazioni non hanno alcun carattere reale per un ipotetico essere a due dimensioni, finché modificano tutte le sostanze allo stesso modo, ed esso potrà quindi ritenere curva una superficie che in realtà è piana e viceversa. In questo caso però l'espressione "in realtà" è priva di qualsiasi significato, poiché tale creatura non può in alcun modo concepire una terza dimensione, esattamente come gli esseri umani non hanno un'idea concreta di una quarta dimensione spaziale. Non ha senso quindi per un simile osservatore una descrizione che rappresenti il suo mondo come "una superficie immersa in uno

spazio tridimensionale"; il suo universo è piuttosto un "continuo bidimensionale" dotato di una struttura geometrica ben precisa, di linee geodetiche definite e di una "misura della curvatura" relativa ad ogni punto. Quest'ultima frase però non sarà associata al concetto di curvatura di una superficie cui noi siamo intuitivamente legati, ma servirà esclusivamente a indicare che l'esagono di fili rimane più o meno aperto o chiuso.

Il lettore che sia riuscito a immedesimarsi con tale essere ipotetico e a farsi un'idea della sua visione del mondo, non avrà difficoltà a compiere un ulteriore passo avanti verso una maggior astrazione dalla realtà empirica.

Tutto ciò che abbiamo visto riferendoci a un essere bidimensionale, potrebbe valere anche per noi, esseri di un mondo a tre dimensioni. Potrebbe accadere cioè che il nostro universo fosse immerso in uno spazio quadridimensionale, esattamente come una superficie è immersa in uno spazio a tre dimensioni, e che esistessero forze sconosciute in grado di modificare tutte le lunghezze in una certa regione dello spazio, senza che ci fosse dato di osservarle direttamente. In tal caso un poliedro costruito in modo del tutto simile al precedente poligono di sei lati e che secondo la geometria ordinaria dovrebbe chiudersi, rimarrebbe viceversa aperto.

Si è mai messo in evidenza qualcosa di simile? Fin dall'antichità la geometria euclidea è stata sempre considerata una teoria esatta; i suoi teoremi furono riconosciuti da Kant come degli "a priori" e in questo senso giudicati eternamente veri. Tuttavia, grandi matematici e fisici, fra i quali Gauss, Riemann e Helmholtz, non condivisero mai questa opinione comune. Una volta Gauss eseguì una difficile misura geodetica nel tentativo di verificare quel teorema della geometria euclidea secondo cui la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. Egli misurò gli angoli del triangolo costituito dalle tre montagne, Brocken, Hoher Hagen e Inselberg e concluse che la loro somma, nei limiti degli errori sperimentali, era uguale al valore previsto dalla teoria.

Per questo tentativo, Gauss fu criticato dai filosofi: essi asseri-

vano infatti che una eventuale deviazione dalla teoria avrebbe al più provato che i raggi luminosi sono deviati nel loro percorso fino al cannocchiale da forze sconosciute, senza costituire una prova definitiva sulla validità o meno della geometria euclidea.

Come abbiamo già ricordato (p. 374), Einstein affermò invece che la geometria dell'universo in cui viviamo non è euclidea e convalidò questa affermazione con esempi concreti. Per comprendere però i legami che esistono fra la sua teoria e le nostre precedenti considerazioni sui fondamenti della geometria, dobbiamo volgere per un istante la nostra attenzione a certe questioni di fondamentale importanza ai confini fra scienza e filosofia.

6. *Matematica e realtà*

Vediamo di stabilire in concreto quale sia l'oggetto della geometria. Essa trova certamente la sua origine storica nelle misure topografiche: è cioè una pura dottrina empirica. Gli antichi studiosi avevano scoperto che i teoremi geometrici possono essere dimostrati in base a criteri deduttivi e che è sufficiente un limitato numero di assiomi perché l'intero sistema possa essere costruito a partire da essi, con un semplice procedimento logico. Questa scoperta fu di vastissima portata: la geometria diventò infatti il modello di ogni scienza deduttiva e molti pensatori cercarono di dimostrare la veridicità delle proprie asserzioni *more geometrico*. Ma che cosa rientra esattamente nel campo d'interesse della geometria? Questo problema, affrontato nel suo aspetto più generale da filosofi e matematici, ha avuto un gran numero di risposte. In genere non è stata discussa la verità e la correttezza dei teoremi geometrici; l'unico problema è stato come si giungesse a tali teoremi assolutamente certi e quali enti riguardassero.

È chiaro d'altra parte che accettare gli assiomi della geometria implica che si accettino come veri tutti gli altri teoremi che da essi derivano, poiché il procedimento deduttivo è valido per chiunque pensi con lo stesso schema logico. Il problema è quindi ricondotto

all'origine di tali assiomi: essi consistono in un numero limitato di affermazioni su punti, rette, piani, che devono valere esattamente. Per questa ragione, diversamente da ciò che capita per gran parte delle affermazioni della scienza o del senso comune, essi non hanno un'origine empirica, poiché l'esperienza fornisce risultati solo approssimativamente corretti e più o meno probabili. Dobbiamo ritenere quindi che esistano altri processi conoscitivi che garantiscano l'assoluta veridicità di questi teoremi. Secondo Kant (1781) il tempo e lo spazio sono forme di intuizione esistenti a priori, che precedono e determinano logicamente ogni esperienza. Da questo punto di vista, gli oggetti del pensiero geometrico sono forme preesistenti di intuizione *pura*: esse costituiscono la base dei giudizi che noi formuliamo sugli oggetti reali nell'intuizione *empirica* (percezione diretta). Così l'affermazione "il bordo di questo regolo è rettilineo" ha origine in un confronto fra la percezione diretta del bordo e l'intuizione pura di linea retta, senza che naturalmente questo processo avvenga a livello di coscienza. Oggetto della geometria è quindi l'idea di retta data dalla intuizione pura; non quindi un concetto logico né una percezione empirica, ma una nozione di specie diversa la cui natura si rivela solo quando la nostra attenzione è rivolta al dato empirico associato all'intuizione di linea retta.

Non abbiamo naturalmente la presunzione di esprimere un giudizio su questa dottrina o su simili teorie filosofiche. Esse si riferiscono essenzialmente all'idea soggettiva dello spazio, e sono quindi estranee agli interessi del nostro libro. Il nostro scopo è invece lo studio dei concetti di spazio e tempo nella fisica, di una scienza cioè che, con sempre maggior consapevolezza, rifiuta l'intuizione come fonte di conoscenza e si rivolge a più precisi criteri conoscitivi.

È vero d'altra parte che un fisico non pronuncerebbe mai l'affermazione "il bordo di questo regolo è rettilineo" basandosi su un'intuizione diretta. Egli è infatti completamente indifferente al fatto che esista o meno un'idea a priori di retta con cui confrontare il bordo del regolo, e si preoccupa se mai di definire *sperimentalmente* il concetto di retta, come farebbe d'altra parte per

ogni altra asserzione relativa a un oggetto concreto. Per esempio, potrebbe vedere se un raggio di luce che tocchi gli estremi del regolo si sovrapponga esattamente a tutti gli altri punti del bordo (fig. 140). Oppure farebbe ruotare il regolo tenendo fissi gli estremi e facendo in modo che la punta di una matita tocchi un punto qualsiasi del bordo; esso sarà rettilineo, se la punta rimarrà in contatto durante l'intera rotazione (fig. 141).



Fig. 140. Verifica della forma rettilinea di un bordo con l'aiuto di un raggio di luce.

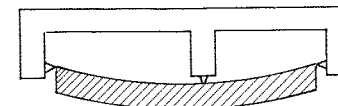


Fig. 141. Verifica della forma rettilinea di un bordo con una rotazione attorno agli estremi.

Se però analizziamo criticamente questi procedimenti, dobbiamo riconoscere che, per quanto superiori all'intuizione per il loro carattere di oggettività (possono cioè essere ripetuti da un qualsiasi altro sperimentatore), essi non risolvono compiutamente il problema di definire ciò che è rettilineo. Nel primo metodo abbiamo evidentemente già supposto che la propagazione luminosa sia rettilinea; nel secondo, che i punti attorno ai quali avviene la rotazione e la punta della matita siano connessi rigidamente e che il regolo non subisca alcuna deformazione. Supponiamo per esempio di ripetere la prova con un bastone di sezione circolare, disposto orizzontalmente e leggermente curvato dal proprio peso; tale curvatura rimarrà inalterata durante la rotazione, e il metodo usato ci porterà a ritenere rettilineo ciò che in realtà è curvo. Sarebbe inutile d'altra parte l'obiezione che errori di questo tipo si verificano in ogni misura sperimentale, e che compito di un esperto sperimentatore è riuscire a evitarli. Ciò che vogliamo dimostrare è che qualsiasi proprietà geometrica, per esempio l'idea di linea retta, non può basarsi su alcuna diretta prova empirica, ma è legata alle proprietà geometriche dello strumento di misura usato (il fatto che i raggi luminosi siano rettilinei, o che le parti di

cui è formato lo strumento siano rigide). L'unica conclusione che possiamo trarre da questi esperimenti, se non vi aggiungiamo tutto ciò che proviene dalla riflessione e da conoscenze precedenti, è che un raggio di luce che incida sugli estremi di un regolo, si sovrappone lungo tutti i punti del bordo; oppure, che se due punti di un regolo coincidono con due punti di un corpo, ciò continuerà a valere per tutti gli altri punti.

In questo senso, ciò che abbiamo effettivamente constatato, è che due punti materiali riconoscibili coincidono fra loro in uno stesso istante e in uno stesso luogo. Tutto il resto, anche la semplice affermazione che con questi esperimenti è possibile determinare la forma rettilinea del regolo, è pura speculazione.

Un'analisi critica dei metodi delle scienze esatte, conduce alla conclusione che tutte le osservazioni sperimentali si riducono essenzialmente a costatazioni di simili coincidenze spazio-temporali. In ogni misura noi affermiamo che si è verificata allo stesso tempo una coincidenza fra l'indice di uno strumento e una divisione della scala graduata, e fra le lancette di un orologio e certe divisioni del quadrante. Qualsiasi misura di una grandezza effettivamente osservabile, sia essa una lunghezza, un tempo, una forza, una massa o una corrente elettrica, consiste di coincidenze nello spazio e nel tempo. Nel linguaggio di Minkowski esse sono punti di universo, individuati nella varietà spazio-temporale dall'intersezione di linee di universo; la fisica è lo studio delle relazioni esistenti fra questi punti.

Una teoria matematica è invece l'elaborazione logica di queste relazioni e, per quanto ciò possa essere complicato, il suo fine ultimo è sempre di rappresentare le coincidenze effettivamente osservate come conseguenze logiche di certi principi e di ipotesi fondamentali. Anche se a volte le conclusioni così raggiunte hanno l'aspetto di teoremi geometrici, la geometria, in quanto scienza applicabile al mondo reale, non ha una posizione di preminenza fra gli altri rami delle scienze fisiche. I concetti fondamentali della geometria sono condizionati dalle proprietà reali degli oggetti materiali, esattamente

come i concetti di ogni altro campo della fisica; quindi non si può attribuire alla geometria una posizione preminente.

Il fatto che la geometria euclidea sia stata posta finora a fondamento della fisica, è dovuto essenzialmente alla proprietà dei raggi luminosi di comportarsi con grande approssimazione come le rette dello schema euclideo, e alla proprietà dei corpi rigidi di soddisfare agli assiomi euclidei della congruenza. L'affermazione che la geometria euclidea è valida in assoluto, non ha però alcun significato per un fisico.

Oggetti della geometria sono quindi le stesse entità materiali, considerate da un punto di vista particolare, alle quali generalmente si riferiscono i suoi teoremi. Una linea retta è per definizione un raggio di luce, una traiettoria inerziale, l'insieme dei punti di un corpo rigido che non subiscono deformazioni durante una rotazione attorno ai suoi estremi, o un altro simile dato empirico. Soltanto l'esperienza potrà dirci se la retta così definita ha le proprietà volute dalla geometria euclidea.

Un esempio di tali proprietà è il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, che Gauss, con un'esperienza che dobbiamo ritenere pienamente giustificata, cercò di verificare. Una proprietà caratteristica della geometria bidimensionale è stata vista per esempio studiando l'esagono di fili (p. 383). Possiamo ritenere quindi che la geometria euclidea sia valida solo quando l'esperienza dimostra che gli oggetti reali, scelti per rappresentare un dato ente geometrico, hanno proprietà "euclidee" e solo in questo caso la geometria euclidea sarà applicabile a questi enti.

Secondo Einstein le definizioni che abbiamo dato dei concetti fondamentali del continuo spazio-temporale mediante regoli rigidi, orologi, raggi di luce o traiettorie inerziali, sono in accordo con le leggi della geometria euclidea o con l'universo di Minkowski per regioni piccole e limitate, ma non in generale; solo la modesta entità di queste deviazioni ne ha impedito in precedenza la scoperta. Alla luce di questa nuova situazione, la teoria è aperta a due possibili indirizzi: possiamo rinunciare a definire linee rette e lunghezze servendoci di raggi di luce e corpi rigidi, e cercare nuove materializza-

zioni dei concetti della geometria euclidea che non mutino le relazioni logiche in essa esistenti; oppure, abbandonando la geometria euclidea, possiamo formulare una più generale teoria dello spazio.

È chiaro a chiunque conosca l'evoluzione del pensiero scientifico, che il primo indirizzo non può essere preso in seria considerazione, anche se sarebbe impossibile dimostrarne a priori l'assurdità. La scelta non avviene qui in base a criteri di logica, ma è determinata da una specie di sensibilità scientifica: non vi è alcun procedimento logico che colleghi la realtà empirica a una particolare teoria. La forza dell'immaginazione, l'intuizione e la fantasia sono qui, come in ogni altro campo, le vere sorgenti della creazione, e il più sicuro criterio di validità è la loro capacità di predire nuovi fenomeni. Per comprendere veramente le ragioni che spinsero Einstein a seguire il secondo indirizzo, il lettore dovrebbe verificare direttamente la difficoltà di portare alle estreme conseguenze l'ipotesi che un raggio di luce nel vuoto cosmico non sia il percorso "più rettilineo" che possiamo immaginare.

Una volta messa da parte la geometria euclidea, Einstein avrebbe potuto rivolgersi a qualcuna delle geometrie non-euclidee, già elaborate da Lobačevskij (1829), Bolyai (1832), Riemann (1854), Helmholtz (1866). In esse si sviluppa principalmente il problema delle correlazioni logiche che collegano fra loro gli assiomi di Euclide, e delle contraddizioni che si avrebbero se essi fossero sostituiti da altri assiomi. Ma qualsiasi tentativo di rappresentare il nostro universo con una geometria di questo tipo, andrebbe incontro a tutti gli inconvenienti già trovati nell'ambito della geometria euclidea. La teoria di Einstein si collega invece alla nozione stessa di fenomeno fisico, cioè al concetto di coincidenza nello spazio-tempo come evento rappresentato da un punto di universo.

7. La metrica del continuo spazio-temporale

Solo l'insieme dei punti di universo ha quindi un'effettiva realtà fisica, e sono le relazioni reciproche esistenti tra questi punti, messe

in luce dagli esperimenti, che determinano la struttura geometrica del continuo spazio-temporale. Siamo di fronte cioè a una situazione analoga a quella già incontrata nello studio della geometria delle superfici, per cui potremo servirci di analoghi procedimenti matematici.

Introduciamo innanzitutto un sistema di coordinate gaussiane nel mondo quadridimensionale e supponiamo che lo spazio sia completamente riempito da una materia in moto arbitrario, comunque deformabile, ma tale da mantenere le sue connessioni continue; dobbiamo pensare, come dice Einstein, a una specie di "mollusco". Tracciamo ora tre famiglie di curve distinguendole con le lettere x , y , z e immaginiamo che agli angoli delle maglie così ottenute, siano situati degli orologi sincronizzati in modo che la differenza fra due istanti misurati da orologi adiacenti sia piccola. In tal modo avremo definito un sistema di riferimento *non rigido*. Nell'universo quadridimensionale il sistema gaussiano consiste di una rete di quattro famiglie di superfici, x , y , z , t .

Ogni sistema rigido in movimento rientra naturalmente come caso particolare in questi generali sistemi deformabili; ma dal nostro punto di vista, non vi è alcuna ragione plausibile nell'introdurre la condizione di rigidità del riferimento come un dato a priori. Arbitraria è anche qualsiasi separazione fra spazio e tempo: infatti, dal momento che possiamo supporre che la velocità degli orologi vari in modo arbitrario ma con continuità, lo spazio inteso come la totalità di tutti i punti di universo "simultanei" non ha un reale significato fisico. La simultaneità di due eventi è connessa esclusivamente al particolare sistema gaussiano scelto.

Ciò che non varia al passaggio da un sistema a un altro, sono i punti d'intersezione delle linee di universo, le coincidenze spazio-temporali. Ogni evento fisico osservabile è costituito dalle relazioni qualitative esistenti fra le posizioni di questi punti di universo, ed esse quindi non possono essere modificate da un cambiamento di coordinate gaussiane.

Queste trasformazioni di coordinate nell'ambito del continuo

spazio-temporale sono transizioni da un sistema di riferimento a un altro in moto e arbitrariamente deformabile. Se riteniamo che debbano essere accettate come leggi fisiche solo quelle leggi della natura che possono essere sottoposte a una diretta verifica empirica, esse dovranno essere invarianti per ogni arbitraria trasformazione delle coordinate gaussiane che trasformi le x, y, z, t , in x', y', z', t' . Tale postulato contiene chiaramente il principio di relatività generale, perché le trasformazioni da un sistema tridimensionale a un altro in moto arbitrario sono un caso particolare delle precedenti; da un punto di vista formale, esso ha però una portata più vasta, perché comprende anche deformazioni arbitrarie delle scale del tempo e dello spazio.

Abbiamo così a disposizione una solida base su cui sviluppare in modo completamente relativistico la teoria del continuo spazio-temporale; lo stadio successivo consisterà nello stabilire delle connessioni fra questo metodo matematico e l'insieme di considerazioni culminate nell'enunciato del principio di equivalenza.

La nostra situazione è in qualche modo simile a quella del topografo che, dopo aver tracciato un sistema di coordinate, non ha ancora iniziato a compiere le sue misure; dobbiamo cioè risolvere il problema della misura in uno spazio quadridimensionale.

La chiave di questo problema ci è fornita dal principio di equivalenza. Abbiamo già visto che con una scelta appropriata del sistema di riferimento è sempre possibile eliminare da una regione sufficientemente piccola dell'universo il campo gravitazionale; tali sistemi di riferimento in moto rettilineo e uniforme fra loro e in cui valgono le leggi della relatività speciale, sono infiniti. Regoli e orologi si comportano in accordo alle trasformazioni di Lorentz: raggi di luce e moti inerziali (vedi pp. 283 e 286) sono linee di universo.

Ne segue allora che all'interno di queste limitate regioni spaziali la quantità

$$F = s^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - c^2\tau^2$$

è un invariante e ha un diretto significato fisico. Se infatti la linea

che congiunge l'origine O (situata all'interno di questa piccola regione) col punto di universo $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ è di tipo spazio, allora s rappresenta la distanza \overline{OP} nel sistema di riferimento in cui i due punti sono simultanei. Se invece la linea di universo \overline{OP} è di tipo tempo, sarà $s = ic\tau$ e τ rappresenterà la differenza temporale fra gli eventi O e P nel sistema in cui essi "coincidono" spazialmente. Abbiamo già detto che s rappresenta la distanza in uno spazio quadridimensionale (p. 361); essa è misurabile direttamente mediante regoli e orologi e corrisponde formalmente alla distanza euclidea in uno spazio quadridimensionale, posto che si introduca la coordinata immaginaria $\varphi = ic\tau$:

$$s = \sqrt{F} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \varphi^2}.$$

Vi è una perfetta corrispondenza tra la validità della relatività speciale in piccole regioni dello spazio e la validità della geometria euclidea per piccole zone di una superficie curva. Ambedue queste teorie non sono più valide però per grandi regioni spaziali. Non vi è infatti alcuna ragione per ritenere che le linee di universo siano rette, invece che geodetiche.

Lo sviluppo della geometria dell'universo quadridimensionale procede ora parallelamente alla geometria delle superfici: il primo problema da risolvere è la misura di una maglia di un arbitrario sistema gaussiano in base alla nozione di distanza quadridimensionale s . Considerando il caso del piano x, t (fig. 142), supponiamo che una maglia sia limitata dalle linee $x=7, x=8$ e $t=3, t=4$ (vedi fig. 137). I raggi di luce uscenti dal vertice $x=7, t=3$, corrispondono a due linee di universo che all'interno di una piccola regione spaziale possono essere considerate come linee rette. Fra di esse giacciono le iperboli $F = \pm 1$, cui nella geometria ordinaria corrisponde un cerchio passante per due punti situati alla medesima distanza 1.

In base alla [97] vale quindi per l'invariante s la relazione

$$s^2 = g_{11}\xi^2 + 2g_{12}\xi\varphi + g_{22}\varphi^2,$$

Supposto per esempio che in una certa regione relativa al sistema di coordinate scelto, non esista campo gravitazionale, avremo che

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = -c^2 \\ g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0; \end{aligned} \quad [99]$$

infatti l'espressione generale della distanza data dalle [98] deve ridursi a $s^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - c^2\tau^2$. Una deviazione delle g_{ik} da questi valori denota così quello stato che nella meccanica ordinaria ha il nome di campo gravitazionale; in tal caso i moti inerziali non sono rettilinei e uniformi e la meccanica newtoniana interpreta questa circostanza come un effetto delle forze di attrazione. I dieci coefficienti g_{ik} hanno quindi una duplice funzione: 1) definiscono la metrica e le unità di lunghezza e di tempo; 2) rappresentano il campo gravitazionale della meccanica ordinaria. Il *campo metrico* e il *campo gravitazionale* sono due aspetti differenti di un medesimo ente, ambedue caratterizzati dalle dieci quantità g_{ik} .

La teoria di Einstein giunge quindi a una fusione della geometria e della fisica, a una sintesi delle leggi di Pitagora e di Newton, attraverso un'analisi critica dei concetti di spazio e di tempo, in connessione col ben noto dato sperimentale dell'indipendenza dell'accelerazione gravitazionale dalla massa del corpo in movimento.

Ma la nuova formulazione della legge d'inerzia è soltanto un primo risultato della teoria. Abbiamo visto che la conoscenza dei coefficienti g_{ik} consente di descrivere matematicamente lo stato geometrico e meccanico dell'universo, relativo a un arbitrario sistema gaussiano. È a questo punto che nasce il problema essenziale della teoria: trovare delle leggi che consentano di determinare il campo metrico (i coefficienti g_{ik}) per ogni punto del continuo spazio-temporale, relativo a un sistema di coordinate gaussiane.

Queste leggi devono soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) devono essere invarianti per qualsiasi trasformazione delle coordinate;
- 2) devono essere determinate completamente dalla distribuzione della materia.

A queste condizioni Einstein aggiunse un requisito formale ripreso dalla teoria newtoniana della gravitazione. Le leggi della meccanica newtoniana, vista come una teoria di azione per pseudocontatto, sono espresse da equazioni differenziali del secondo ordine, come, d'altra parte, tutte le teorie di campo della fisica. Ciò suggerisce di postulare che le nuove leggi della gravitazione, che sono equazioni differenziali nelle g_{ik} , siano anch'esse al più del secondo ordine.

In base a questi postulati Einstein dedusse le equazioni di campo della gravitazione, e in seguito Hilbert, Klein, Weil, Eddington ed altri matematici ne chiarirono interamente la struttura formale. Naturalmente è impossibile riportare queste leggi e gli argomenti su cui sono costruite senza ricorrere a più complessi strumenti matematici; ci limiteremo quindi a poche indicazioni.

Come abbiamo già visto trattando della geometria delle superfici, la curvatura è invariante rispetto a trasformazioni arbitrarie delle coordinate gaussiane, e può essere determinata da misure sulla superficie (il lettore ricordi l'uso dell'esagono di fili); sappiamo inoltre che dal punto di vista formale tale curvatura è un'espressione differenziale del secondo ordine.

In modo completamente analogo possiamo trovare degli invarianti per lo spazio quadridimensionale che rappresentano una generalizzazione diretta dell'invariante di curvatura della teoria delle superfici. Consideriamo tutte le linee geodetiche tangenti a una superficie bidimensionale in un punto P dell'universo quadridimensionale: l'insieme di queste linee di universo definisce un'ulteriore superficie, che potremo chiamare superficie geodetica. Se ora immaginiamo di tracciare su essa un esagono tale che i suoi lati e i suoi raggi abbiano la stessa lunghezza quadridimensionale, esso in generale non si chiuderà e dovremo concludere che la superficie geodetica è una superficie curva. Una seconda superficie geodetica uscente da P che individui un'altra giacitura nello spazio quadridimensionale (cioè tangente a una diversa superficie) avrà una curvatura differente. L'insieme di tutte le curvature di tali superfici geodetiche individua un certo numero di invarianti indipendenti. Se questo numero è

zero, in un appropriato sistema di coordinate gaussiane le superfici geodetiche sono superfici piane, e lo spazio quadridimensionale è euclideo. Le deviazioni dallo zero caratterizzano l'esistenza di campi gravitazionali, e devono dipendere dalla distribuzione di materia. Ma secondo la teoria della relatività speciale (p. 331, formula [83]), la massa di un corpo è uguale al rapporto fra l'energia e il quadrato della velocità della luce. La distribuzione di materia è quindi determinata da un particolare invariante energia-quantità di moto cui è appunto proporzionale l'invariante di curvatura, e il fattore di proporzionalità corrisponde alla costante gravitazionale della teoria di Newton (p. 86). Le formule così ottenute sono le equazioni di campo della gravitazione; una volta che si conosca la distribuzione spazio-temporale dell'energia e della quantità di moto, è possibile calcolare il valore dei coefficienti g_{ik} che a loro volta determinano il moto dei corpi materiali e la distribuzione dell'energia. Si tratta in realtà di risolvere un complicatissimo sistema di equazioni differenziali; ma la complessità della formulazione matematica è compensata dall'enorme progresso concettuale dovuto al suo carattere d'invarianza generale. Essa è infatti l'espressione della completa relatività di tutti gli eventi. Lo spazio assoluto scompare così totalmente dalle leggi della fisica.

Vi sono alcune espressioni della terminologia usata finora che generalmente infastidiscono le persone che non hanno familiarità col linguaggio matematico. Per analogia col concetto di curvatura di una superficie, abbiamo chiamato *misura della curvatura* un particolare invariante dello spazio tridimensionale, affermando che una regione spazio-temporale è "curva" se questa misura è diversa da zero. Tali persone reagiscono in genere a queste espressioni sostenendo di poter comprendere che esista qualcosa di curvo *all'interno* dello spazio ma di non riuscire assolutamente a immaginare che lo spazio stesso sia curvo. Il fatto è che non è necessario immaginare qualcosa di simile; possiamo forse immaginare la luce che non vediamo o i suoni che non udiamo? Ma se siamo disposti ad ammettere che in questi casi i metodi della fisica superino le capacità dei nostri

sensi, dobbiamo riconoscere un identico privilegio anche alla teoria dello spazio-tempo. L'intuizione coglie infatti solo ciò che può sviluppare sulla base di un processo mentale risultante dall'azione congiunta di fenomeni fisici, filosofici e psicologici, e da cui è quindi condizionata. In fisica non si esclude naturalmente che le percezioni sensoriali possano interpretare con considerevole approssimazione le classiche leggi di Euclide. Le deviazioni predette dalla teoria di Einstein sono infatti così piccole, che soltanto la straordinaria precisione sperimentale raggiunta nella fisica e nell'astronomia può metterle in evidenza. Esse tuttavia esistono, e se l'insieme dei nostri esperimenti conduce al risultato che il continuo spazio-temporale non è euclideo ma "curvo", l'intuizione deve cedere il passo a un giudizio comprensivo di tutte le nostre conoscenze.

9. *Deduzioni e conferme nell'ambito della meccanica*

La prima richiesta cui deve soddisfare la nuova teoria consiste nel dimostrare che la meccanica classica, e la fisica in generale, possono essere ritenute valide in prima approssimazione, poiché altrimenti sarebbe impossibile giustificare l'accordo fra teoria ed esperimento trovato durante due secoli di ricerche. Successivamente si dovranno mettere in evidenza le deviazioni che essa introduce e suggerire delle verifiche sperimentali.

Per quale ragione la meccanica classica consente una descrizione sufficientemente valida di tutti i fenomeni terrestri e di gran parte dei moti che avvengono nell'universo? Cosa dobbiamo sostituire, per esempio, ai concetti di spazio assoluto e di tempo assoluto, che sono essenziali per interpretare, secondo i principi newtoniani, anche fenomeni molto semplici come il moto di un pendolo di Foucault o l'esistenza di forze inerziali e centrifughe?

In linea di principio possiamo ritenere che una risposta a questi problemi sia già contenuta nella nostra discussione preliminare sul principio di relatività generale, quando abbiamo riconosciuto che le masse distanti, e non lo spazio assoluto, sono cause reali di feno-

meni fisici (p. 363). La distribuzione delle masse in tutto l'universo, l'insieme di tutte le stelle, genera in ogni punto e ad ogni istante una metrica definita, cioè un campo gravitazionale; il problema di stabilire come questo campo sia costituito su scala cosmica è argomento che può essere discusso solo nell'ambito del cosiddetto "problema cosmologico", di cui ci occuperemo brevemente in seguito (p. 422). Sappiamo però che in una regione sufficientemente limitata e per una scelta appropriata del sistema di riferimento, la metrica deve essere euclidea; ciò comporta che le orbite inerziali e i raggi luminosi sono linee di universo rettilinee. D'altra parte, rispetto all'intero universo, anche le dimensioni del nostro sistema planetario sono "limitate" e in esso quindi, per una scelta appropriata del sistema di coordinate e trascurando le deviazioni locali prodotte dal sole e dai pianeti, corrispondenti alle forze di attrazione della teoria classica, devono valere le leggi di Newton. L'astronomia ci insegna che un tale sistema di riferimento, in cui l'azione delle masse delle stelle fisse all'interno di una regione del nostro sistema planetario conduce a una metrica euclidea, è in uno stato di quiete (o di moto rettilineo e uniforme) relativo all'insieme di tutte le masse, e che le perturbazioni prodotte dalle stelle fisse sono sufficientemente piccole e irregolari da poter ritenere che in media si annullino. Questa circostanza può essere spiegata solo se si applicano a tutto l'universo i nuovi principi dinamici; ce ne occuperemo più a lungo nell'ultimo paragrafo. Limitiamoci per ora allo studio di una regione contenuta nel sistema planetario, dove tutti i risultati della meccanica newtoniana mantengono praticamente la loro validità. Teniamo presente però che il piano di oscillazione di un pendolo di Foucault è fisso rispetto all'insieme delle masse distanti, e non rispetto allo spazio assoluto; cioè, più in generale, le forze centrifughe non sono dovute alle rotazioni assolute, ma alle rotazioni relative alle masse distanti. Vi è inoltre una certa libertà nella scelta del sistema di riferimento in cui formulare le leggi della fisica: possiamo considerare un sistema di coordinate in cui il campo metrico sia euclideo e non esista campo gravitazionale (se si esclude il campo locale dovuto al sole e ai pianeti),

oppure un sistema in moto e comunque deformabile; solo in quest'ultimo caso esiste un campo gravitazionale e la geometria perde il suo carattere euclideo.

I coefficienti g_{11}, \dots, g_{34} che caratterizzano la metrica assumono valori differenti per ogni sistema di riferimento, ma la forma generale di tutte le leggi della fisica non cambia; è proprio in questo carattere di invarianza che risiede la differenza essenziale fra la nuova e la vecchia dinamica. Nella vecchia teoria infatti l'introduzione di un sistema di riferimento in moto arbitrario (o deformabile) portava a una variazione delle leggi fisiche; la scelta di sistemi di coordinate a riposo nello spazio assoluto, permetteva però di stabilire queste leggi nel modo "più semplice" (è il caso appunto della meccanica newtoniana). Nella teoria della relatività generale non esistono simili formulazioni "più semplici" delle leggi fisiche, ma tutt'al più può accadere che i coefficienti g_{ik} assumano valori particolarmente semplici in limitate regioni spaziali o ne differiscano di poco. Così le equazioni della meccanica newtoniana conservano la loro validità in un sistema di riferimento che sarebbe euclideo nella ristretta regione dello spazio occupata dal sistema planetario se non esistessero il sole e i pianeti; in tale riferimento le g_{ik} avrebbero i valori dati dalla [99]. In realtà questi coefficienti non hanno esattamente tali valori, ma, come vedremo meglio in seguito, ne differiscono in prossimità delle masse dei pianeti. In linea di principio quindi, qualsiasi altro riferimento (per esempio un sistema in rotazione) in cui le g_{ik} non coincidano con le quantità date dalla [99] (purché si trascuri il campo generato dalle masse planetarie) è completamente equivalente al primo. È lecito così ritornare al vecchio punto di vista di Tolomeo di una terra immobile nell'universo, che significherebbe scegliere un sistema di riferimento rigido, solidale con essa, in cui tutte le stelle eseguono un moto di rotazione attorno all'asse terrestre con la stessa velocità angolare. Non è sufficiente però modificare semplicemente la metrica [99] al caso di un sistema in rotazione, poiché si dovrebbe anche dimostrare che tale metrica trasformata è determinata, secondo le equazioni di campo di Einstein, dalla rotazione delle masse distanti.

Il calcolo esplicito è stato eseguito da Thirring, che ha calcolato il campo dovuto a una sfera cava rotante, dimostrando come nel suo interno compaiano forze centrifughe e altre forze inerziali, precedentemente interpretate come un effetto dello spazio assoluto.

Dal punto di vista della teoria di Einstein quindi, le idee di Tolomeo e di Copernico sono ambedue esatte, e la scelta può avvenire esclusivamente in base a un criterio di opportunità. Nello studio del moto dei pianeti può essere certamente più conveniente l'ipotesi di Copernico; ma è sicuramente privo di significato definire "fittizio" il campo gravitazionale che si manifesta per un cambiamento del sistema di riferimento, in opposizione al campo "reale" generato dalle masse vicine (analogamente al problema della lunghezza "reale" di un regolo, già incontrato nella teoria della relatività speciale (p. 302)). Un campo gravitazionale non è né "reale" né "fittizio", ma ha un significato effettivo solo in relazione al sistema di coordinate scelto, proprio come nel caso della lunghezza del regolo. Non possiamo pensare di distinguere i campi per il fatto che siano o meno direttamente generati dalle masse; nel primo caso infatti sono particolarmente le masse vicine a produrre un certo effetto, nel secondo le masse distanti di tutto l'universo.

Contro questa teoria sono stati avanzati alcuni argomenti fondati sul "senso comune", fra i quali vogliamo ricordare il seguente: se un treno colpisce violentemente un ostacolo e si fracassa, tale evento può essere descritto in due maniere differenti. In un caso, se si sceglie come sistema di riferimento la terra (supposta a riposo rispetto alle masse cosmiche), l'urto può essere considerato una conseguenza dell'accelerazione (negativa) del treno; nell'altro, supposto che il sistema di coordinate sia solidale con il treno, è possibile ritenere che, al momento della collisione, tutto l'universo faccia un "balzo" rispetto a questo sistema. In ambedue i casi, la distruzione del treno è dovuta alla presenza di un intenso campo gravitazionale in direzione parallela al moto iniziale. Si potrebbe chiedere allora, perché il campanile della chiesa di un villaggio vicino non crolla? Perché se le due affermazioni — l'universo è a riposo e il treno subisce un'improvvisa

decelerazione; il treno è a riposo e l'universo viene rallentato — devono essere equivalenti, le conseguenze del "balzo" e del campo gravitazionale ad essa associato, si manifestano solo parzialmente nella collisione del treno? A questa obiezione si risponde che il campanile non crolla poiché, nel periodo di decelerazione, la sua posizione relativa alle masse distanti non subisce alcuna variazione. Tutti i corpi, dalle stelle più lontane al campanile, risentono allo stesso modo del balzo dell'universo, e tutti sono in moto libero nel campo gravitazionale esistente durante la decelerazione, a eccezione del treno che è soggetto alle forze di ritardo. Ma se ci limitiamo a considerare gli eventi interni (com'è appunto l'equilibrio del campanile) un corpo in moto libero è del tutto equivalente a uno in equilibrio e non soggetto a forze. Non si ha quindi alcun mutamento dell'equilibrio e il campanile non crolla; soltanto il treno non è in moto libero ed è sottoposto a forze che ne causano la distruzione.

Appellarsi al "senso comune" in queste difficili questioni è certamente rischioso. Alcuni fautori della teoria dell'etere materiale rifiutavano la teoria della relatività, perché inaccessibile alle nostre capacità d'intuizione e di astrazione. Una volta accettato poi il principio di relatività speciale, per le indiscutibili verifiche sperimentali a suo favore, vi fu ancora chi cercò di opporsi alla relatività generale perché giudicata contraria al senso comune. Ma Einstein replicava con questo esempio: secondo la relatività speciale, un treno in moto uniforme è un sistema di riferimento del tutto equivalente alla terra; eppure il senso comune del macchinista non accetterebbe un simile punto di vista. Egli farebbe notare infatti che il suo compito è di procurare energia alla locomotiva, non all' "ambiente esterno", e che deve esistere un moto della macchina per dimostrare appunto l'effetto del suo lavoro. A questo argomento si può rispondere che anche una locomotiva a trazione elettrica, per quanto non sia alimentata da un macchinista, ma da una centrale solidale con la terra, si fracassa urtando contro un ostacolo. Il senso comune può condurci fuori strada.

Vogliamo ora riassumere le nostre considerazioni sulla meccanica

celeste alla luce della teoria di Einstein, con particolare riguardo ai campi gravitazionali locali dovuti alle masse dei pianeti, che si sovrappongono al campo di tutto l'universo.

Dobbiamo limitarci però a un compendio schematico di queste ricerche, perché il loro sviluppo è strettamente connesso alle conseguenze matematiche delle equazioni di campo.

Il problema più semplice è lo studio del moto di un pianeta attorno al sole; il modo migliore per affrontarlo è considerare un sistema gaussiano in cui il campo gravitazionale sia euclideo. Per tale riferimento, come sappiamo, se si trascurassero le masse del sole e del pianeta, il sistema solare non risentirebbe alcun effetto della gravità, e le g_{ik} avrebbero i valori dati dalla [99]. Il problema si risolve semplicemente determinando le deviazioni da questi valori dovute alla massa del sole. Il campo corretto deve essere indipendente dal tempo e possedere una simmetria sferica attorno al centro del sole. Einstein diede una risoluzione approssimata delle equazioni di campo e, più tardi, Schwarzschild dimostrò che in questo caso esiste una soluzione esatta che conduce a valori piuttosto semplici per le g_{ik} , mediante i quali è possibile calcolare le orbite planetarie come linee geodetiche. La loro curvatura, che la teoria di Newton interpretava come un effetto della forza di attrazione, appare ora come una conseguenza della curvatura dell'universo spazio-temporale, di cui rappresentano le linee più brevi.

Le orbite planetarie che così si determinano sono estremamente vicine a quelle previste dalla teoria di Newton; questo risultato, se si pone attenzione al fatto che le due teorie partono da punti di vista completamente differenti, non è certo insignificante. Nella meccanica newtoniana, partendo dal concetto di spazio assoluto (che da un punto di vista filosofico non può essere considerato soddisfacente), si postula l'esistenza di una forza di deflessione che ha la singolare e inspiegabile proprietà di essere proporzionale alla massa inerziale; la teoria di Einstein parte invece da un principio generale, del tutto esauriente dal punto di vista filosofico, e ne sviluppa nel modo più semplice tutte le implicazioni. Se anche l'unico risultato

della teoria fosse stata l'interpretazione della meccanica newtoniana in base al principio di relatività generale, le sue caratteristiche di chiarezza e di generalità nel descrivere le leggi della natura, costituirebbero una sicura ragione di preferenza.

Tuttavia, se l'opera di Einstein non avesse oltrepassato i limiti di questo risultato, sarebbe stata apprezzata esclusivamente da pochi fisici teorici e astronomi. L'interesse più vasto di una teoria è sempre legato alla sua capacità di interpretare fatti non ancora chiariti o di predire nuovi fenomeni: la relatività generale ha raggiunto risultati favorevoli in ambedue queste direzioni.

10. *Previsioni e conferme della nuova meccanica*

Abbiamo visto che il moto di un pianeta attorno al sole avviene, secondo i calcoli di Einstein e di Schwarzschild, lungo una geodetica dello spazio-tempo quadridimensionale, molto vicina all'orbita predetta dalla teoria newtoniana. Calcoli molto accurati hanno però rivelato una leggera deviazione che aumenta in prossimità di un campo gravitazionale. È chiaro allora che lo studio del moto di un pianeta prossimo al sole dovrebbe essere il modo più adatto per mettere in evidenza tali deviazioni. Abbiamo già visto studiando la meccanica celeste (p. 90), che in un caso, quello appunto del pianeta più vicino al sole, Mercurio, la teoria di Newton cade in difetto. Essa non è in grado di spiegare il *moto del perielio di Mercurio*, la cui entità è di 43 secondi di arco per secolo; tale valore è invece esattamente predetto dalla teoria di Einstein. Questo risultato, già previsto dai calcoli di Leverrier, è di estrema importanza perché ottenuto senza introdurre alcuna costante arbitraria, ma solo come una conseguenza necessaria della teoria, allo stesso modo della validità delle leggi di Keplero nel caso dei pianeti lontani dal sole.

Per ciò che riguarda gli altri pianeti il moto del perielio dovuto a effetti relativistici è di così piccola entità da non poter essere misurato; inoltre non è possibile separare teoricamente questo effetto da altri

dovuti a differenti perturbazioni. Nella tavola seguente sono confrontati i valori sperimentali e teorici per il moto del perielio dei tre pianeti più vicini al sole:

Moto del perielio in secondi di arco per secolo

	Teoria	Esperimento
Mercurio	$43,03 \pm 0,03$	$42,56 \pm 0,94$
Venere	8,63	—
Terra	3,8	$4,6 \pm 2,7$

Si osservi l'ottimo accordo fra il valore sperimentale e quello teorico nel caso del pianeta Mercurio; per la terra l'accordo è soddisfacente, nei limiti degli errori sperimentali, e per Venere non esiste alcun dato con cui confrontare il valore teorico. Il moto del perielio di Mercurio rimane finora l'unica conferma della relatività generale nell'ambito della meccanica.

Non mancarono naturalmente, sia da parte di Einstein che di altri fisici, ulteriori proposte di verifiche sperimentali. Nel paragrafo 9 del capitolo 3 e nel primo di questo capitolo, abbiamo discusso le diverse interpretazioni delle forze centrifughe: secondo Newton esse sono dovute allo spazio assoluto, secondo Mach ed Einstein all'insieme delle masse distanti delle stelle. Se questa ultima interpretazione fosse corretta, la forza esercitata su di un corpo da una massa elevata dovrebbe variare d'intensità secondo che quest'ultima sia a riposo o in rotazione. In base a quest'ipotesi il moto dei pianeti del nostro sistema planetario dovrebbe essere perturbato per effetto della rotazione del sole attorno al suo asse (un giro completo ogni 21 giorni). Tale perturbazione darebbe nuovamente origine a un moto del perielio. Sfortunatamente però una valutazione dell'entità di un simile effetto dimostra che per ogni pianeta esso è troppo piccolo per poter essere osservato. Difatti, come abbiamo ricordato, non si sono osservate deviazioni di origine sconosciuta nei moti dei pianeti. Lo stesso avviene anche nel caso dei satelliti dei pianeti; l'effetto dovuto alla

rotazione dei pianeti è troppo piccolo perché possa essere misurato.

Con il lancio dei satelliti artificiali, si sono aperte però nuove possibilità di conferma del moto del perielio; sia quello che ha origine nella differenza fra le leggi dinamiche di Newton e di Einstein, che quello dovuto alla rotazione del corpo centrale.

Nella tavola seguente sono riportati i valori previsti per ambedue gli effetti.

Raggio della terra = 6367 km

Distanza media del satellite		Rapporto fra il semiasse minore e quello maggiore dell'orbita ellittica	Moto del perielio	
dal centro della terra	dalla superficie della terra		(in secondi di arco per secolo) dovuto alle de- viazioni dalla legge di Newton	dovuto alla rotazione della terra
	(in km)			
6770	400	0,99995	1450	—43
10000	3650	0,969	586,6	

Le orbite scelte sono praticamente dei cerchi, perché il rapporto fra i semiassi è molto vicino a uno. Il segno negativo per il moto del perielio dovuto alla rotazione terrestre, significa che esso avviene in senso opposto all'effetto maggiore, dal quale dev'essere sottratto.

Nel caso dei satelliti artificiali, tutti e due questi effetti sono sufficientemente grandi da poter essere osservati. Vi sono però considerevoli difficoltà: i satelliti vicini alla superficie terrestre sono rallentati a causa dell'attrito con gli strati superiori dell'atmosfera e dopo un certo intervallo di tempo ricadono sulla terra. Vi sono inoltre delle perturbazioni dovute non soltanto alle masse del sole, della luna e dei pianeti, ma anche alla deviazione della superficie terrestre dalla forma sferica, che producono effetti non facilmente calcolabili.

Studiando il moto di un corpo attorno a un altro abbiamo sempre trascurato finora il moto di quest'ultimo; quest'ipotesi è giustificata se il corpo centrale ha una massa molto più grande dell'altro (come nel caso del sole e un pianeta o del pianeta e la luna). Possiamo comunque rinunciare a questa restrizione e risolvere il problema a

due corpi coi metodi della meccanica newtoniana; il risultato è che ambedue descrivono orbite kepleriane attorno al loro baricentro.

Non esiste invece una soluzione esatta delle equazioni del moto nel caso in cui vi siano più di due corpi, ed è necessario ricorrere alla teoria delle perturbazioni (p. 88). In tal caso dobbiamo richiedere che le equazioni newtoniane del moto di un sistema di molti corpi possano essere ottenute come prima approssimazione dalla teoria di Einstein, e che sia possibile prevedere le deviazioni fra le due teorie. Si tratta di dimostrare che il campo totale generato dai corpi in movimento secondo le equazioni di Einstein si riduce, in prima approssimazione, al campo newtoniano dovuto alle singole masse, e che le equazioni delle linee geodetiche corrispondono alle leggi newtoniane del moto in questo campo. Questa dimostrazione non è difficile ed è stata fatta dallo stesso Einstein; ma il risultato raggiunto non gli sembrò del tutto soddisfacente.

Vi sono altre due ipotesi fondamentali nella teoria: 1) il principio di relatività generale che (insieme col postulato di massima semplicità) porta alle equazioni di campo e, una volta risolte, al campo metrico-gravitazionale; 2) l'ipotesi che le traiettorie dei moti liberi siano rappresentate dalle linee geodetiche di questa metrica. Il primo postulato corrisponde approssimativamente alla legge di attrazione newtoniana (legge dell'inverso del quadrato della distanza), il secondo, alla legge fondamentale della dinamica (proporzionalità fra forza e accelerazione). Nei suoi ultimi anni Einstein cercò di superare questo dualismo, che giudicava insoddisfacente; egli arrivò allora alla conclusione che l'interpretazione dei moti orbitali come linee geodetiche di una geometria non euclidea (ipotesi 2), per quanto punto di partenza delle sue considerazioni sulla relatività generale, fosse superflua, perché già contenuta in realtà nelle equazioni di campo (ipotesi 1).

L'idea è che il campo prodotto da un corpo eserciti una certa azione sul corpo stesso e ne determini le linee d'universo; dal punto di vista matematico si tratta di un problema estremamente complesso, di cui non possiamo dare neanche un cenno. Esso fu affrontato una prima volta da Einstein in collaborazione con Infeld e Hoffmann,

e in seguito, con una notevole semplificazione dei calcoli, dallo stesso Infeld. Un metodo differente è stato anche sviluppato dal fisico russo Fock. La meccanica relativistica assume così una forma del tutto soddisfacente dal punto di vista logico, basata sull'invarianza generale delle equazioni di campo; essa consente di spiegare tutti i fatti attualmente conosciuti sul moto dei corpi celesti ed è in grado di prevedere un gran numero di nuovi fenomeni sicuramente osservabili in un prossimo futuro.

11. Previsioni e verifiche sperimentali di fenomeni ottici

Oltre alle prove astronomiche di cui abbiamo parlato, solo poche conferme sono venute finora dall'ottica, poiché gli effetti osservabili nel caso di fenomeni ottici sono generalmente molto piccoli.

Uno di questi è lo *spostamento verso il rosso delle righe spettrali* della luce proveniente da stelle di massa elevata. Il forte campo gravitazionale esistente in prossimità della loro superficie modifica la metrica e fa sì che un orologio vada più lentamente che sulla superficie terrestre, dove il campo è meno intenso. Ma per ottenere una misura del tempo possiamo sempre pensare di sostituire a un orologio il processo ondulatorio della luce emessa dagli atomi e dalle molecole di un gas. Il loro meccanismo di vibrazione non può certamente dipendere dalla posizione in cui si trovano e quindi il periodo deve essere lo stesso in ogni riferimento in cui il campo gravitazionale assuma un identico valore (per esempio sia nullo).

Se T è il periodo di vibrazione in una regione priva di campo, $s=icT$ sarà la corrispondente distanza invariante fra due punti di universo corrispondenti a due massimi o minimi successivi della vibrazione, relativi al sistema di riferimento in cui l'atomo è a riposo. In un sistema accelerato, in cui è presente un campo gravitazionale, s è dato dalla [98], in cui ξ, η, ζ caratterizzano le differenze fra le coordinate spaziali dell'atomo negli istanti d'inizio e di fine dell'osservazione, e τ (che insieme con ξ, η, ζ è misurato rispetto al sistema di riferimento fissato) è il corrispondente intervallo di tempo. Se

l'origine delle coordinate spaziali coincide col centro dell'atomo, possiamo porre $\xi=\eta=\zeta=0$ e ottenere

$$s^2 = -c^2 T^2 = g_{44} \tau^2,$$

da cui

$$\tau = T \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}.$$

Ora, se si esclude il caso di uno spazio privo di campo gravitazionale, g_{44} è differente da $-c^2$, e quindi $\tau \neq T$ e potremo porre per esempio $g_{44} = -c^2(1-\gamma)$; τ diventa allora

$$\tau = T \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$$

o, se γ è sufficientemente piccolo (vedi nota a p. 260),

$$\tau = T \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right). \quad [100]$$

Tale valore rappresenta la differenza tra i segnali di due orologi situati in punti diversi, i cui campi, dati da g_{44} , differiscono della quantità γ .

Il problema di determinare il segno di γ può essere risolto considerando un caso particolarmente semplice in cui la soluzione sia direttamente suggerita dal principio di equivalenza. È il caso per esempio di un campo gravitazionale costante, com'è quello che si verifica nelle immediate vicinanze della superficie di un corpo celeste; tale campo è equivalente, nei suoi effetti, ad attribuire all'osservatore un'accelerazione dello stesso valore, ma diretta in verso opposto alla forza di attrazione. Detta l la distanza che separa l'osservatore dalla superficie della stella, un'onda luminosa impiegherà un tempo $t=l/c$ a percorrerla, e non vi sarà alcuna differenza nel fenomeno osservato fra questo e il caso in cui l'osservatore viaggi, durante lo stesso intervallo di tempo, in direzione opposta con accelerazione g . La sua velocità nel momento in cui è raggiunto dall'onda luminosa

sarà $v=g \cdot t=g(l/c)$, e avrà la stessa direzione del moto della luce, per cui secondo la [41] (p. 157) la frequenza osservata sarà

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu \left(1 - \frac{gl}{c^2}\right). \quad [101]$$

La stessa formula può essere ottenuta direttamente dal principio di equivalenza, in base all'ipotesi dei quanti di luce: un'onda di frequenza ν consiste in un quanto di energia $\varepsilon=h\nu$ e massa inerziale $m=\varepsilon/c^2=(h\nu)/c^2$, che, secondo il principio di equivalenza, coincide con la massa gravitazionale. Una volta percorsa la distanza l in opposizione al campo gravitazionale g , la loro energia sarà diminuita di una quantità pari a $g \cdot l \cdot m$, e quindi alla fine avrà il valore

$$h\nu' = h\nu - gl \frac{h\nu}{c^2} = h\nu \left(1 - \frac{gl}{c^2}\right);$$

a parte il fattore h , questa è di nuovo la [101]. La relazione che lega il periodo τ osservato nel campo gravitazionale, al periodo T relativo a uno spazio privo di campo è

$$\tau = T \frac{1}{1 - (gl)/c^2}$$

o, approssimativamente,

$$\tau = T \left(1 + \frac{gl}{c^2}\right). \quad [101a]$$

Il significato fisico di questa formula è il seguente: supponiamo di sincronizzare due orologi costruiti allo stesso modo e a riposo fra loro; dopo un certo intervallo di tempo in cui uno di essi sia stato sottoposto all'azione di un campo gravitazionale, i due orologi non saranno più sincroni e quello che ha subito l'azione del campo sarà in ritardo rispetto all'altro.

Confrontando la [101a] con la [100] possiamo affermare che nel caso di un campo costante, $\gamma=(2gl)/c^2$. Poiché secondo la [15] (p. 68) $G \cdot x$ è l'energia potenziale di un corpo posto a distanza x

da un campo costante G , e la [13] (p. 62) $G = m \cdot g$, dove m è la massa, la differenza di energia potenziale fra due corpi di massa unitaria a distanza l fra loro sarà $l \cdot g$. Detta φ questa quantità, potremo scrivere $\gamma = (2\varphi)/c^2$.

Ora, anche se la nozione di energia potenziale è estranea alla teoria di Einstein, possiamo sempre attribuire un significato alla quantità φ nel limite in cui la meccanica newtoniana approssima la meccanica di Einstein e ritenere che la relazione

$$\gamma = \frac{2\varphi}{c^2}$$

sia valida per ogni campo gravitazionale e che γ sia positiva se la luce viaggia in direzione opposta al campo.

Queste considerazioni possono essere applicate alla luce proveniente dal sole o dalle stelle, poiché in tal caso il campo che essa deve vincere è molto intenso, mentre il campo della gravità terrestre è debole. Le linee spettrali della luce emessa dalle stelle dovrebbero risultare quindi spostate verso il rosso. Per quanto si tratti di un effetto molto piccolo, l'osservazione sperimentale ne ha dimostrato l'esistenza, almeno da un punto di vista qualitativo; un accordo quantitativo più preciso non è stato ancora raggiunto, poiché non si conoscono con l'approssimazione necessaria per simili calcoli le masse e i raggi delle stelle fisse. I risultati finora ottenuti sembrano comunque nella direzione prevista dalla formula di Einstein.

Anche lo spostamento delle righe spettrali del sole è difficile da osservare, sia perché si tratta di un effetto piuttosto piccolo e sia perché ad esso si sovrappongono altri effetti analoghi. Le misure eseguite da parecchi astronomi hanno dimostrato che per la luce emessa dalla parte centrale del disco solare lo spostamento è molto più piccolo di quello previsto dalla teoria, mentre aumenta fino a raggiungere il valore teorico per le regioni della corona solare. Tale disaccordo è facile da interpretare se si pensa allo stato di moto turbolento in cui si trovano i gas che costituiscono le differenti parti del disco del sole; esso è dovuto ai violenti spostamenti delle masse

più calde verso l'esterno e di quelle più fredde verso il centro. Si avrà quindi un effetto Doppler che produrrà uno spostamento addizionale verso il violetto tale da ridurre lo spostamento verso il rosso previsto da Einstein.

A questo punto è possibile dare un'esauriente spiegazione del "paradosso degli orologi", di cui abbiamo parlato in precedenza (p. 312). Consideriamo due osservatori A e B , il primo a riposo in un sistema inerziale (della teoria della relatività speciale) e il secondo in moto lungo un percorso qualsiasi per un tempo t_0 misurato nel primo sistema. Al ritorno di B , l'orologio di A sarà in anticipo di un tempo pari a $\frac{1}{2}\beta^2 \cdot t_0$ ([76], p. 306). Questa formula vale naturalmente solo in modo approssimato, ma è sufficientemente accurata per il nostro scopo, purché tutti i successivi calcoli siano eseguiti in un'identica approssimazione.

Possiamo però anche ritenere che B sia a riposo e quindi A si muova nella direzione opposta; in tal caso non si può semplicemente concludere che l'orologio di B debba essere in anticipo rispetto ad A dello stesso intervallo di tempo, poiché B non è a riposo in un sistema inerziale, ma è sottoposto ad accelerazioni.

Dal punto di vista della relatività generale dobbiamo tener presente infatti che una variazione del sistema di riferimento introduce, durante il periodo di accelerazione, un campo gravitazionale.

Nel primo caso dell'esempio precedente A è a riposo in una regione spaziale in cui la metrica è euclidea e dalla quale sono assenti campi gravitazionali. Nel secondo, B è a riposo in un sistema di riferimento dove, nei brevi istanti di partenza, inversione di direzione e arrivo, si manifestano campi gravitazionali, e in questi campi A è in caduta libera, mentre B è tenuto fisso dall'azione di forze esterne. Di questi tre campi gravitazionali il primo e l'ultimo non danno luogo ad alcuna differenza di tempo fra gli orologi di A e di B , poiché negli istanti di partenza e arrivo essi si trovano nello stesso punto. Tale differenza di tempo può verificarsi in un campo gravitazionale, secondo la [101], solo quando gli orologi sono a distanza l fra loro: ciò avverrà nel momento in cui A inverte la sua direzione. Se chia-

miamo t il tempo durante il quale esiste un campo gravitazionale (supposto che B sia a riposo) l'orologio di A , posto a distanza l nel campo g , sarà in anticipo rispetto a B di $(gl/c^2)t$ [101a]. Tuttavia, per tutto il tempo in cui A si muove di moto uniforme ed è quindi valido il principio di relatività speciale, l'orologio di A sarà viceversa in ritardo rispetto a B di un tempo $(\beta^2/2)t_0$. In conclusione l'anticipo di A rispetto a B risulterà uguale a

$$\frac{gl}{c^2}t - \frac{\beta^2}{2}t_0.$$

Si può ora dimostrare che questo valore coincide esattamente con il risultato che si ottiene considerando A a riposo, e cioè che l'anticipo di A rispetto a B vale $\frac{1}{2}\beta^2 t_0$.

Se infatti v è la velocità dell'osservatore, la variazione subita nel tempo t in cui la sua direzione si inverte sarà $2v$ e l'accelerazione g assumerà quindi il valore $2v/t$. D'altra parte la distanza fra i due osservatori al momento dell'inversione, quando cioè solo metà del tempo t_0 è stata impiegata, dovrà essere $l=vt_0/2$.

Ne segue quindi che

$$gl = v^2 \frac{t_0}{t}$$

e

$$\frac{gl}{c^2}t - \frac{\beta^2}{2}t_0 = \frac{v^2}{c^2}t_0 - \frac{\beta^2}{2}t_0 = \frac{\beta^2}{2}t_0,$$

che è appunto quanto volevamo dimostrare.

Il paradosso degli orologi nasce quindi dall'aver applicato la relatività speciale a un caso in cui solo i criteri stabiliti dalla relatività generale possono essere ritenuti validi.

Un errore analogo è alla base della seguente obiezione abbastanza frequente, anche se la sua spiegazione è piuttosto semplice.

Secondo la relatività generale, un sistema di coordinate in rotazione rispetto alle stelle fisse (cioè solidale con la terra) è del tutto equivalente a un sistema a riposo rispetto alle stelle fisse. In tale

sistema tuttavia, la velocità delle stelle assume valori considerevoli; se r è la distanza di una stella e T la durata di un giorno, la sua velocità è $v=2\pi r/T$. Tale valore coincide con la velocità della luce c se $r=(cT)/(2\pi)$. Se misuriamo r in unità astronomiche, cioè in anni luce,* la relazione precedente deve essere divisa per $c \times 365$, avendo posto T uguale a 1 giorno. Per valori di r superiori a $1/(2\pi \times 365)$ anni luce, la velocità v dovrebbe quindi essere maggiore di c . Poiché anche nel caso delle stelle più vicine la loro distanza dal sole è di parecchi anni luce, si potrebbe pensare a una evidente contraddizione col postulato della relatività speciale (p. 316) secondo cui la velocità di un corpo materiale deve essere sempre minore della velocità della luce.

Tale contraddizione tuttavia non sussiste, perché la validità del precedente postulato è limitata al campo della relatività speciale. Nella relatività generale esso va formulato in modo più elaborato. Come sappiamo, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento tale che in prossimità di un punto arbitrario la geometria sia euclidea, non esista campo gravitazionale e le g_{ik} abbiano i valori dati dalla [99]. Rispetto a questo sistema e in questa limitata regione spaziale, la velocità della luce è effettivamente il limite superiore di ogni velocità.

Ma se non sono soddisfatte tutte queste condizioni (per esempio in presenza di un campo gravitazionale), la velocità dei corpi o della luce può assumere qualsiasi valore. Ricordiamo che le linee di universo dei raggi di luce sono definite dall'equazione $F=s^2=0$, che nel piano x,t si riduce a

$$s^2 = g_{11}\xi^2 + 2g_{14}\xi\tau + g_{44}\tau^2 = 0.$$

Il rapporto ξ/τ , che rappresenta la velocità della luce, può allora essere calcolato da questa equazione; per esempio, se $g_{14}=0$, si ottiene $g_{11}\xi^2 + g_{44}\tau^2 = 0$ e quindi la velocità della luce $\xi/\tau = \sqrt{-g_{44}/g_{11}}$ dipende

* Un anno luce è la distanza coperta dalla luce in un anno (365 giorni) alla velocità di 300000 km/s.

dai valori assunti da g_{11} e g_{44} . Basta allora che la velocità di un corpo materiale sia più piccola di $\sqrt{-g_{44}/g_{11}}$.

Se scegliamo la terra come sistema di riferimento, il campo centrifugo (p. 107) vale $4\pi^2 r/T^2$ e assume valori molto elevati a grandi distanze; in conseguenza di ciò i coefficienti g_{ik} differiranno notevolmente dai valori euclidei dati dalla [99]. È chiaro allora come la velocità della luce, e quindi quella dei corpi materiali, possa assumere per particolari direzioni del raggio luminoso valori molto più grandi di c .

In un arbitrario sistema di coordinate gaussiane, non soltanto la velocità della luce può assumere valori differenti, ma i raggi stessi non sono più linee rette. Una seconda verifica sperimentale della relatività generale è connessa appunto alla curvatura dei raggi luminosi. Come le orbite inerziali dei corpi, anche le linee di universo dei raggi sono geodetiche e quindi in generale delle linee curve; a causa però della grande velocità di propagazione della luce, la curvatura dei raggi luminosi sarà molto più piccola di quella delle orbite celesti. La ragione di questa deflessione è evidente in base al principio di equivalenza: poiché in un sistema di riferimento accelerato ogni moto rettilineo e uniforme si trasforma in un moto curvo e vario, la stessa cosa deve valere anche in un campo gravitazionale arbitrario.

Un raggio di luce proveniente da una stella fissa, subisce un'attrazione in prossimità del sole e descrive rispetto ad esso un'orbita leggermente concava (fig. 143). Un osservatore sulla terra assegnerà alla stella una posizione corrispondente alla direzione del raggio osservato, e quindi la stella gli apparirà leggermente spostata. Questa deflessione può essere calcolata in base alla teoria newtoniana, considerando, per esempio, il raggio luminoso come una cometa che si avvicini al sole alla velocità della luce; poiché il moto iperbolico di una cometa, come l'orbita ellittica di un pianeta, non dipende dalla sua massa (uguaglianza delle masse inerziale e gravitazionale) non è necessario porsi il problema della massa di queste "particelle di luce". Ha un certo interesse dal punto di vista storico, il fatto che questa

idea fosse già stata sviluppata molto tempo prima (1801) dal matematico tedesco Soldner. La formula ottenuta era simile a quella di Einstein, ma prevedeva per la curvatura un valore due volte più piccolo. L'errore si spiega se si tiene conto del fatto che secondo la teoria di Einstein il campo gravitazionale in prossimità del sole è più intenso di quello previsto dalla teoria di Newton. Proprio questa differenza (che sfuggì all'attenzione di Einstein nella sua prima pubblicazione sulla teoria) costituisce un criterio particolarmente chiaro per stabilire la validità della relatività generale.

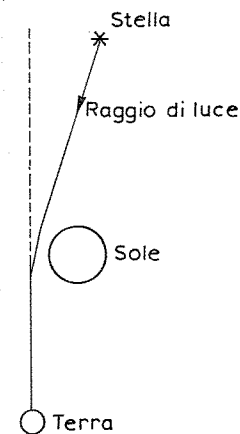


Fig. 143. Deflessione di un raggio proveniente da una stella in prossimità del sole.

Lo spostamento delle stelle fisse visibili in prossimità del sole può essere osservato soltanto in occasione di un'eclissi totale, poiché altrimenti l'intensa luce solare impedirebbe l'osservazione delle stelle.

La prima verifica sperimentale fu compiuta su iniziativa dell'astronomo inglese Eddington il 29 maggio 1919. Due spedizioni inglesi, una in Brasile e un'altra alle Isole Principe, osservarono l'eclissi totale e raccolsero numerose fotografie delle stelle prossime al sole. I risultati ottenuti furono annunciati il 6 novembre 1919 e procla-

mati come un vero trionfo della teoria di Einstein. Essi confermarono lo spostamento predetto da Einstein di 1,75 secondi di arco.

In seguito questa misura fu ripetuta parecchie volte in occasione di altre eclissi e, per quanto si tratti di misure piuttosto complicate, non vi è alcun dubbio ormai sull'esistenza di un effetto molto vicino a quello previsto da Einstein; in ogni caso il valore che si ricava dalla meccanica newtoniana (ottenuto una prima volta da Soldner e successivamente da Einstein in un suo lavoro preliminare), che è solo metà del valore relativistico, si è dimostrato chiaramente inesatto. Non si è ancora arrivati però ad una conferma sperimentale definitiva; alcune misure recenti mostrano uno spostamento più grande del 10 per cento del valore teorico. Ulteriori ricerche potranno stabilire se questa discrepanza è da attribuire agli errori sperimentali o se non sia dovuta a una effettiva mancanza della teoria di Einstein; in ogni caso essa si è dimostrata molto più vicina alla realtà della teoria newtoniana o di altre teorie finora proposte.

Con l'attuale perfezionamento delle misure sperimentali sembrerebbe possibile l'osservazione di effetti relativistici nel campo gravitazionale terrestre. Misure sullo spostamento delle righe spettrali sono state compiute recentemente grazie alla sorprendente scoperta del fisico tedesco Mössbauer. Per chiarire questo effetto sarà necessaria una breve digressione sulla fisica atomica e nucleare. È noto che un nucleo atomico assorbe un quanto γ di frequenza identica a quella del quanto che è in grado di emettere. Si tratta in sostanza di un fenomeno di risonanza ben noto in acustica, ottica ed elettromagnetismo. È chiaro allora come un atomo che emetta una radiazione γ di frequenza definita, possa essere usato come ricevitore della stessa radiazione. Il fenomeno di risonanza è però disturbato da due cause: l'effetto Doppler e l'effetto di rinculo.

A causa dell'agitazione termica gli atomi di un gas e di un liquido sono in continuo movimento; ciò dà origine a un effetto Doppler che ha per conseguenza il fatto che la frequenza emessa da un atomo aumenti o diminuisca in relazione alle direzioni relative fra moto atomico e radiazione emessa (vedi p. 153). Analogamente, a causa

del moto degli atomi, la frequenza di risonanza dell'atomo ricevente può variare e non coincidere esattamente con la frequenza della radiazione emessa, per cui non è più assorbita. Ciò accade anche nei solidi, la cui struttura consiste in una disposizione regolare di atomi legati fra loro da forze molto intense (i cosiddetti reticoli cristallini); anche in questo caso però gli atomi possono oscillare attorno alle posizioni di equilibrio e quindi produrre un effetto Doppler.

Il secondo effetto che disturba il fenomeno di risonanza è causato dal rinculo subito da un atomo (meglio: un nucleo atomico) quando emette un quanto γ ; tale rinculo è dovuto all'impulso $p = \epsilon/c$ del quanto di energia $\epsilon = h\nu$ (vedi p. 344). In base al teorema di conservazione dell'impulso, l'atomo acquisterà quindi un impulso uguale e contrario e avrà una velocità $v = p/m$ e un'energia $e = \frac{1}{2}mv^2$. Questa energia è fornita dalla radiazione, la cui frequenza passa dal valore $\nu = \epsilon/h$, che avrebbe se l'atomo fosse immobile, al valore più piccolo $\nu' = (\epsilon - e)/h$. Analogamente, l'atomo che a riposo assorbirebbe la frequenza ν , riceverà, se in moto, una frequenza maggiore $\nu'' = (\epsilon + e)/h$ poiché, dopo l'assorbimento, dovrà possedere l'impulso addizionale del quanto γ ; la radiazione fornirà cioè non soltanto l'energia ϵ ma anche l'energia cinetica e .*

La scoperta di Mössbauer consiste nell'aver trovato il modo di eliminare queste due cause di disturbo. L'effetto Doppler scompare se gli atomi sono portati a temperature così basse che il moto di agitazione termica sia in pratica inesistente; il rinculo può essere evitato incorporando gli atomi nella struttura cristallina di un solido, dove le forze fra atomi vicini sono molto intense. L'impulso del quanto γ non si trasferisce quindi a un solo atomo, ma all'intero cristallo di massa M ; poiché M è molto più grande della massa di un atomo, la velocità $V = p/M$ e l'energia $E = \frac{1}{2}MV^2 = p^2/(2M)$ saranno estremamente piccole e non potranno essere osservate. Ne segue che gli atomi emetteranno effettivamente una radiazione di frequenza ν

* Poiché l'energia e è più piccola di ϵ , p è stato calcolato in funzione di ϵ , cioè di ν e non di ν' e ν'' ; l'errore commesso rispetto a un calcolo più accurato è però molto piccolo e non può essere apprezzato sperimentalmente.

e assorbiranno la stessa frequenza, purché durante i processi di emissione e di assorbimento siano a riposo. Se viceversa essi fossero in moto relativo con velocità u si avrebbe di nuovo un effetto Doppler e una variazione della frequenza assorbita. L'effetto è misurabile se lo spostamento prodotto non è troppo piccolo rispetto alla larghezza naturale $\delta\nu$ della riga spettrale. Il fatto che la riga di uno spettro sia caratterizzata da una larghezza $\delta\nu$ è comprensibile dal punto di vista della teoria ondulatoria: l'energia emessa nella radiazione produce una diminuzione dell'energia di vibrazione degli atomi. D'altra parte una radiazione di frequenza ν è un ideale treno d'onde indisturbato e infinito, mentre ogni vibrazione reale, per esempio quella emessa da un atomo che ha un "inizio" e una "fine" determinati appunto dal processo di emissione, è una sovrapposizione di treni d'onde infiniti di diversa frequenza. È per questa ragione che in pratica nell'intorno di una data frequenza ν esistono altre frequenze estremamente vicine, e la riga ha una larghezza finita, detta appunto larghezza naturale.

La precisione di questo metodo è veramente sorprendente; esso consente di apprezzare velocità dell'ordine di 10^{-3} mm/s.

In questo modo è possibile misurare lo spostamento delle righe spettrali dovute al campo gravitazionale terrestre (Pound e Rebka, Harvard 1960; Cranshaw, Schiffer e Whitehead, Harwell 1960). In queste esperienze atomo irradiante e ricevente furono posti rispettivamente in cima e ai piedi di una torre di 22 metri di altezza, e si usò la radiazione γ del Fe_{57} , di larghezza relativa 5×10^{-13} . La quantità da misurare era circa 1/100 di questa. Il risultato della misura fu $\Delta\nu/\nu = 5,1 \times 10^{-15}$ con una precisione di circa il 10 per cento, in buon accordo col valore teorico di $4,9 \times 10^{-15}$.

In precedenza erano stati proposti anche altri metodi di misura; si era suggerito per esempio di usare radiazioni di grande lunghezza d'onda, sul tipo di quelle che si usano nei radar. Le tecniche sperimentali hanno fatto grandi progressi in questi ultimi anni nel campo di queste radiazioni, ed è oggi possibile ottenere radiazioni di frequenza con buona approssimazione costante, ed eseguire misure di

estrema precisione. Un metodo potrebbe consistere nel situare emettitore e ricevitore radar ai piedi e in cima ad un'alta montagna, ma richiederebbe una precisione non ancora raggiunta. Un altro, nel porre l'emettitore in un satellite artificiale e il ricevitore sulla terra: in questo caso, a causa della grande distanza, potrebbe anche essere sufficiente una precisione minore, non lontana da quella che si è attualmente in grado di raggiungere.

12. La cosmologia

L'idea di Ernst Mach, che le forze inerziali siano dovute all'insieme di tutte le stelle fisse, suggerì la possibilità di applicare la relatività generale allo studio dell'universo. Il primo passo in questa direzione, che segnò l'inizio dell'attuale sviluppo delle scienze che studiano la struttura cosmologica e l'origine dell'universo, fu compiuto da Einstein nel 1917. Si tratta di un campo di ricerche ancora in pieno sviluppo e ricco di importanti risultati, per quanto lontano da una conclusione soddisfacente, su cui non possiamo certamente soffermarci; per farlo, dovremmo probabilmente scrivere un nuovo libro altrettanto lungo. Non possiamo rinunciare però a un breve cenno sulla situazione attuale, poiché le ricerche cosmologiche sono considerate da molti come una delle parti più importanti dell'opera di Einstein.

Le prime ipotesi sulla natura dell'universo risalgono a tempi lontanissimi; gli antichi, che ritenevano le stelle incastonate in sfere di cristallo, non avevano dato alcuna risposta agli interrogativi su ciò che potesse esistere oltre di esse. Aristotele concepì l'idea di un tempo infinito e nel medioevo Tommaso d'Aquino affermò che questa opinione non poteva essere confermata né rifiutata: problemi come l'origine dell'universo e la natura del tempo potevano essere affrontati solo su basi di fede. Essi furono argomento di costante interesse per la filosofia scolastica. L'idea di una estensione infinita dell'universo fu espressa dal filosofo medievale Nicolò Cusano (1401-64). Newton incluse nei suoi principi fondamentali il concetto di uno spazio e di un tempo infiniti (vedi p. 79) e arrivò alla conclusione

che le stelle, distribuite uniformemente in tutto lo spazio, dovessero essere infinite; se il loro numero fosse finito si arriverebbe infatti a un'accumulazione di materia stellare dovuta all'attrazione reciproca. Fu chiaro in seguito che questa ipotesi conduceva a gravi complicazioni dal punto di vista matematico, fino a richiedere delle modifiche della legge di gravitazione newtoniana a grandi distanze. All'ipotesi che il numero delle stelle sia finito si può anche opporre un argomento opposto a quello di Newton, cioè che un tale sistema finirebbe per estinguersi per diffusione. Vi è infatti una certa analogia fra il sistema delle stelle fisse, che sono dotate di considerevoli velocità distribuite in ogni direzione, e un gas molecolare; è chiaro allora che se il gas non è rinchiuso fra le pareti di un recipiente tenderà a espandersi e a diffondersi. D'altra parte sappiamo dalla teoria cinetica dei gas che un'attrazione proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, come nella legge di Newton, non è sufficiente per impedire la diffusione. Sembra quindi difficile credere che il sistema stellare esista nonostante questa tendenza a una espansione. Tale argomento però ha perso gran parte della sua efficacia poiché, come vedremo fra poco, l'ipotesi di un universo in espansione si è rivelata in accordo con alcune recenti ricerche.

Ma vi sono altri possibili argomenti a sostegno delle due diverse tesi di questo problema; è stato osservato, per esempio, che se il numero delle stelle fosse infinito la radiazione luminosa dovrebbe essere diffusa in tutta la volta celeste poiché, se è vero che l'intensità della luce di una stella diminuisce col quadrato della distanza, il numero di stelle negli strati successivi della volta celeste dovrebbe aumentare nell'identico rapporto. Se questi *strati* si estendessero all'infinito e la densità delle stelle rimanesse approssimativamente costante il cielo sarebbe quindi illuminato uniformemente. L'argomento però non tiene conto del fatto che lo spazio non è vuoto e che la materia della radiazione cosmica, addensandosi, assorbe e diffonde la luce che l'attraversa. D'altra parte quest'ultimo argomento varrebbe solo se vi fosse stato un inizio del mondo nel tempo, altrimenti l'universo si troverebbe in uno stato di equilibrio termico e la

materia *condensata* sarebbe incandescente e luminosa quanto le stelle. Si dovrebbe ammettere anzi l'ipotesi di "una distruzione di tutto l'universo per effetto del calore". Si tratta di un problema di estrema difficoltà su cui non possiamo soffermarci.

Tutte queste considerazioni non portarono a una risposta definitiva; un decisivo passo avanti si ebbe quando Einstein impostò l'intero problema dal punto di vista della relatività. Egli tentò innanzi tutto di chiarire come l'ipotesi di una distribuzione uniforme di materia nello spazio potesse superare l'obiezione che un tale sistema dovesse estinguersi per diffusione, incontrando però le stesse difficoltà già comparse nei precedenti tentativi di risolvere il problema su basi classiche. Come abbiamo già visto queste difficoltà potevano essere superate soltanto in base all'ipotesi piuttosto radicale che la legge di Newton non fosse valida a grandi distanze. Analogamente, Einstein suggerì di modificare la sua legge di gravitazione, senza rinunciare naturalmente al principio di invarianza generale, introducendo nell'equazione di campo un termine che fosse sensibilmente diverso da zero solo nel caso delle distanze cosmiche. Sostituì in tal senso alle dieci quantità

$$R_{11}, R_{22}, R_{33}, R_{44}, R_{23}, R_{31}, R_{12}, R_{14}, R_{24}, R_{34}$$

(analoghe, dal punto di vista geometrico, ai coefficienti metrici g_{ik}) che caratterizzavano la curvatura del suo universo non-euclideo, nuove quantità

$$R_{11} + \lambda g_{11}, \dots, R_{34} + \lambda g_{34},$$

con λ costante universale; come le vecchie R_{ik} anche le nuove combinazioni dovevano essere determinate dalla distribuzione delle masse. Il risultato cui pervenne dimostrò, come aveva sperato, che le nuove equazioni possedevano una soluzione statica (cioè indipendente dal tempo) corrispondente a una densità uniforme di materia stellare, non-euclidea, finita, ma illimitata.

Quest'ultima affermazione, che può parere a primo avviso piut-

tostrana, richiede qualche chiarimento. Come in una geometria bidimensionale non è difficile immaginare una superficie finita ma non limitata, la superficie sferica, così Einstein ritiene che qualcosa di analogo esista anche in uno spazio a tre dimensioni; in particolare, per una distribuzione uniforme delle masse, esiste un analogo tridimensionale della superficie sferica. Le sue geodetiche sono, come sulla superficie sferica, delle linee chiuse e precisamente dei cerchi massimi, e rappresentano le traiettorie dei raggi luminosi o le orbite delle particelle libere (cioè delle particelle che non subiscono l'azione delle masse locali). Quindi un segnale di luce che viaggi in una certa direzione ritornerebbe, naturalmente dopo un tempo estremamente lungo, dalla direzione opposta. Vi sono però altre conseguenze di questa ipotesi che con le attuali possibilità sperimentali non sarebbe impossibile mettere in evidenza: supponiamo che due osservatori, uno in Europa, l'altro agli antipodi, per esempio a Sydney in Australia, osservino in direzioni opposte due stelle. È comprensibile allora che in un universo sferico ambedue gli osservatori vedano la stessa stella, e che ciò possa essere confermato da un'analisi dello spettro emesso. Esperienze di questo tipo potrebbero essere condotte più agevolmente con le moderne tecniche radio astronomiche. Si tratta in ogni caso di possibilità future, ma abbiamo voluto accennarvi per chiarire come l'idea di uno spazio chiuso, finito e non limitato non è una possibilità inaccessibile all'indagine empirica.

Nel modello statico di Einstein il raggio di curvatura della superficie sferica tridimensionale è connesso al valore della costante λ , e ambedue dipendono dalla quantità totale di materia nell'universo: più grande è la massa totale più il raggio diminuisce e quanto più rarefatta è la materia tanto più piccola diventa la curvatura dell'universo.

In un primo tempo sembrò che questo semplice modello dell'universo fosse abbastanza soddisfacente, poiché non contraddiceva alcun fatto noto; le osservazioni dimostravano infatti che le stelle compivano piccoli e irregolari movimenti e che la loro densità era abbastanza uniforme. Ma le nuove prospettive aperte dalle idee di

Einstein stimolarono altre ricerche, e ben presto il problema assunse un aspetto considerevolmente diverso.

Nello stesso anno (1917) in cui Einstein pubblicò il suo lavoro sul modello statico dell'universo, l'astronomo olandese De Sitter trovò una seconda soluzione dell'equazione di campo (con il termine λ) che possedeva la proprietà di essere compatibile anche con l'ipotesi di un universo "vuoto", privo di materia. In presenza di masse la soluzione non era indipendente dal tempo, ma prevedeva una specie di repulsione cosmica fra i corpi che tendesse ad allontanarli all'infinito e a diminuire sempre più la densità del sistema. Questa espansione naturalmente doveva essere apprezzabile solo a grandissime distanze. De Sitter cercò allora di rintracciare il maggior numero di dati concernenti i moti dei corpi celesti più lontani, trovandone alcuni, per la verità non troppo attendibili, sul moto delle nebulose. Tali enormi ammassi stellari, simili al sistema galattico cui appartiene il sole, appaiono in gran parte, per la loro estrema distanza, come una sottile nebbia luminosa, e solo in alcuni casi è possibile distinguere le stelle di cui sono formati. Questi sistemi, che oggi gli astronomi chiamano galassie, erano poco conosciuti in quel tempo, ma nei casi in cui era stato possibile ottenere le velocità radiali da un'analisi dell'effetto Doppler (vedi p. 153), si era notato uno spostamento verso il rosso molto più evidente di quello osservato per le righe spettrali delle stelle appartenenti alla nostra galassia, che è notevolmente più vicina. Queste indicazioni suggerirono successive ricerche teoriche e nuove, e più accurate, misure delle distanze e delle velocità delle nebulose. Nel 1929 circa, l'astronomo americano Hubble dimostrava l'esistenza di una correlazione fra la distanza e la velocità di una nebulosa e precisamente che la loro velocità di fuga era proporzionale alla distanza dalla terra. Si ritornava così alla vecchia ipotesi, suggerita dal comportamento dei gas, di un'espansione dell'universo. D'altra parte, supponendo che tale espansione si fosse sviluppata in modo costante nel tempo, si doveva ritenere che l'intero sistema avesse avuto inizio da un'unica massa estremamente condensata, e che fosse possibile calcolare il tempo trascorso dall' "inizio

dell'universo" ai giorni nostri. Hubble otteneva in questo modo un valore compreso fra 2 o 3×10^9 anni.

Dopo i primi lavori sull'argomento di Einstein e De Sitter, la cosmologia trovava ulteriore sviluppo negli studi di Friedmann, Lemaitre, Tolman, Robertson e altri. Fra le due possibilità, in un certo senso opposte, previste da Einstein e da De Sitter, si inseriva tutta una serie di nuovi modelli dell'universo e si poneva il problema di trovare quale di queste ipotesi verificasse con maggior precisione i dati sperimentali, primo fra tutti il valore trovato da Hubble. Attualmente, sia per le molteplici ramificazioni che hanno avuto origine dalla teoria, sia per la grande quantità di nuove osservazioni sperimentali, non è facile esprimere una valutazione. Alcune idee che erano sembrate al loro apparire fra le più feconde di sviluppi ulteriori, si sono rivelate troppo limitate o addirittura false. Vi sono soluzioni dinamiche dell'equazione di Einstein che, come il modello statico del 1917, hanno la proprietà di essere finite e chiuse; esse corrispondono, in una superficie a due dimensioni, a una sfera in espansione uniforme, come una palla di gomma che vada gradualmente ingrandendosi. Ma questa concezione di un universo finito e chiuso non sembra attualmente così vincolante, poiché è noto che esistono altre soluzioni dinamiche in cui l'universo è infinito e "piano". Si potrebbe osservare inoltre che già il modello classico di un gas in espansione, le cui particelle obbediscano alla legge di Newton, costituirebbe una sufficiente approssimazione in uno spazio euclideo dei principali fatti sperimentali, e che quindi una simile teoria poteva essere costruita 150 anni fa. Tuttavia l'idea che l'insieme delle stelle formi un sistema dinamico non era sicuramente concepibile in quel periodo, se è vero che nella letteratura scientifica non se ne trovano che pochissimi cenni; soltanto Boltzmann, uno dei fondatori della teoria cinetica dei gas e della meccanica statistica, accenna, senza però un serio approfondimento, alla possibilità che il sistema stellare sia in espansione. D'altra parte tale procedimento classico si dimostrerebbe insufficiente nel caso di oggetti molto distanti e quindi estremamente veloci, e dovrebbe utilizzare in luogo della meccanica

newtoniana le leggi della relatività speciale. L'astronomo inglese Milne ha costruito appunto una teoria dell'universo in espansione sulla base della relatività speciale e di un principio di uniformità, secondo cui l'universo mostra un medesimo aspetto da qualsiasi luogo sia osservato. Milne era così convinto dell'efficacia dei suoi principi da giudicarli logicamente necessari; come Eddington, egli pensò di poter costruire una teoria dell'universo su principi a priori privi di qualsiasi evidenza empirica. Ma nessuna delle due ipotesi, abbastanza differenti e contraddittorie, si è rivelata utile per lo sviluppo della scienza.

Il termine cosmologico λ , introdotto da Einstein nel 1917, ebbe un destino piuttosto tortuoso; Weyl ed Eddington lo interpretarono come una lunghezza universale e su questa idea costruirono una teoria di carattere prevalentemente filosofico. In seguito, quando risultò chiaramente che, oltre ai modelli di Einstein e di De Sitter, esistevano altre possibili teorie, il termine λ apparve superfluo e lo stesso Einstein propose di eliminarlo. Ma sia Einstein sia altri studiosi avevano in un certo senso sottovalutato il fatto che il termine λ era necessario affinché l'età dell'universo, calcolata estrapolando i dati di Hubble, fosse in accordo con il massimo valore ottenibile da osservazioni indipendenti sulle meteoriti e sulle stelle (l'età delle meteoriti trovate sulla terra si determina analizzando il contenuto di elementi radioattivi e dei loro prodotti di decadimento; poiché sono noti i tempi di decadimento questi materiali funzionano in un certo senso come degli orologi atomici su scala cosmica). L'età dell'universo e l'età degli elementi radioattivi risultavano dello stesso ordine di grandezza, con un valore di circa 1×10^9 anni, ma il termine cosmologico era necessario affinché l'età dell'universo risultasse maggiore di quella degli elementi radioattivi. A partire dal 1952 la situazione cambiò nuovamente, poiché misure più precise delle distanze cosmiche dimostrarono che i valori precedentemente accettati da Hubble erano troppo piccoli. Cessava quindi il contrasto fra il valore calcolato dalla formula di Hubble e le misure radioattive sulle meteoriti o su altri corpi celesti, e l'introduzione del termine

cosmologico si rivelava di nuovo superflua. Misure più recenti dell'età dell'universo danno un valore che si aggira attorno a 10×10^9 anni.

L'idea di un "inizio dell'universo" apparve generalmente poco credibile e si cercò di sostituirla con l'ipotesi di un universo stazionario. Ciò è ovviamente impossibile se non si suppone che la materia sia continuamente creata dal nulla, altrimenti, a causa del moto di espansione del sistema stellare la densità di materia in alcune regioni dell'universo dovrebbe gradatamente diminuire. Al contrario, ci sono buone ragioni per ritenere che la densità media di materia stellare nell'universo sia uniforme.

È stato suggerito perciò che l'universo si trovi in equilibrio attraverso un processo continuo di creazione di materia. Ciò sembrerebbe trovare una conferma nell'esistenza delle cosiddette *novae* e *supernovae*, la cui origine si fa risalire generalmente alle esplosioni di stelle poco luminose. Jordan ha suggerito invece che esse possono essere realmente nuove, e che si creino per trasformazione di energia gravitazionale in materia. La sua teoria è una generalizzazione della teoria di Einstein; seguendo un suggerimento di Dirac, egli suppose che la costante gravitazionale della relatività generale (vedi p. 400) non fosse effettivamente una costante e dovesse essere considerata come l'undicesima quantità caratteristica del campo, dello stesso rango delle dieci componenti del campo metrico. Questa teoria non ha portato però ad alcun risultato concreto; lo stesso vale anche per un'ipotesi dovuta a Hoyle, Bondi e Gold, secondo la quale, anche se le galassie si allontanano l'una dall'altra, il quadro dell'universo su larga scala non cambia; infatti la materia si creerebbe dal nulla in uno spazio vuoto. Fortunatamente per gli inventori di questa teoria, il numero di atomi creati è così piccolo (dell'ordine di un atomo in un cubo con lo spigolo di 100 metri in un secolo) da sfuggire a ogni possibile misurazione.

Il lettore potrebbe avere l'impressione a questo punto che i moderni studiosi di cosmologia abbiano rinunciato ad affrontare il problema da un corretto punto di vista empirico, per avventurarsi nelle più impensate affermazioni prive di qualsiasi verifica sperimentale.

Questo è sicuramente il caso delle teorie cui abbiamo appena accennato, soprattutto perché all'impressione di stupore e di fastidio che esse suscitano si aggiunge generalmente il fanatismo con cui sono enunciate. Né può meravigliare che una simile situazione sia stata sfruttata dalle diverse ideologie, nel tentativo di trovare in una di queste teorie una conferma ai propri principi e una condanna di altri. Molti teologi sono favorevoli all'idea di un principio dell'universo, perché in accordo con il dogma della creazione. Com'era già stato messo in evidenza dai geologi, la scala dei tempi della Bibbia doveva essere moltiplicata per un fattore considerevole; basta quindi aumentare ulteriormente questo fattore per interpretare il racconto biblico come una rappresentazione simbolica di un fatto scientificamente provato. Al contrario, le ideologie materialistiche e atee accettano l'ipotesi di un universo stazionario, che esclude l'atto della creazione e non pone scomodi interrogativi su ciò che esisteva prima della creazione. L'*Enciclopedia sovietica* assume a proposito una posizione abbastanza vaga, considerando l'espansione come un fenomeno limitato in un universo altrimenti stazionario.

È quasi superfluo notare come ipotesi di questo tipo, enunciate con il crisma del dogma, siano estranee allo spirito della scienza, e vadano rifiutate per la parzialità delle loro interpretazioni. Chi accetta l'idea di un "principio" dimentica che quanto sappiamo con certezza è soltanto che deve essersi verificato uno stato di elevata densità di materia, ben diverso da ciò che attualmente conosciamo sulla distribuzione delle stelle nell'universo; è lecito ritenere quindi che in questo stato non siano applicabili le nozioni di spazio e tempo, così intimamente correlate a questa distribuzione stellare. Parlare di "principio" è solo un modo per descrivere in termini di concetti noti un particolare stato della materia, senza alcun riferimento a una creazione dal nulla, che d'altra parte non è oggetto di ricerca scientifica ma materia di fede, com'era ben noto ai filosofi e ai teologi antichi. A chi poi rifiuta questa ipotesi perché sembra convalidare l'idea della creazione, si può obiettare che il principio dell'universo, per quanto ne sappiamo, può benissimo essere la fine di un prece-

dente sviluppo della materia, di cui sia ormai scomparso ogni traccia. Per quanto riguarda infine l'affermazione dell'*Enciclopedia Sovietica* in cui la cosmologia relativistica viene rifiutata come dottrina "idealistica", tale atteggiamento esclude ogni possibilità di accostarsi in modo razionale ai problemi connessi con la cosmologia.

Ad ogni modo l'esistenza di teorie fantastiche e irrazionali non può certo ridurre l'importanza delle idee di Einstein, che hanno reso possibile la comprensione di nuovi aspetti dell'universo dando un impulso all'astronomia paragonabile a quello dovuto all'opera di Copernico.

13. Le teorie unitarie di campo

Abbiamo già osservato che la relazione fra massa ed energia ottenuta in relatività speciale, ha le sue principali applicazioni nella fisica delle particelle elementari e in fisica nucleare. In ambedue i casi le masse che intervengono rappresentano enormi quantità di energia concentrate in piccolissime regioni dello spazio.

Si potrebbe presumere quindi che esse diano luogo a spazi curvi e corrispondenti campi gravitazionali, la cui esistenza spieghi le forze di coesione che tengono unite le particelle, nonostante la repulsione coulombiana dovuta alla carica.

Una stima delle due forze, repulsione elettrostatica e attrazione gravitazionale, è però deludente. Se consideriamo due elettroni a distanza r , le forze sono ambedue del tipo costante/ r^2 e la costante vale e^2 , nel caso elettrostatico, e $k \cdot m^2$ nel caso gravitazionale; posto allora $e/m \cong 5 \cdot 10^4 (\text{cm}^3/\text{s}) \cdot g^{\frac{1}{2}}$ (per e si sono usate le dimensioni adottate a p. 189) e $k \cong 7 \cdot 10^{-8} (\text{cm}^3/\text{s}^2) \cdot g$, il loro rapporto $(e/m)^2/k$ vale circa 3×10^{42} . Ciò significa che l'attrazione gravitazionale è troppo debole per spiegare la coesione dell'elettrone.

Pochi anni dopo gli ultimi lavori sulla relatività generale, Einstein cercò di combinare in un'unica teoria le leggi dell'elettromagnetismo e della gravitazione nel tentativo di arrivare non solo ad una unificazione formale, ma ad una spiegazione dell'esistenza delle parti-

celle elementari cariche e del loro comportamento del tutto particolare, com'è descritto dalle teorie quantistiche.

È impossibile nei limiti di questo libro dare un'idea della teoria dei quanti (vedi p. 344); vogliamo solo ricordare che, a partire da un lavoro di Planck del 1900, la successiva evoluzione dei principi della teoria fu in parte determinata dall'opera di Einstein. Lo stesso volume (1905) del periodo tedesco "Annalen der Physik" su cui è pubblicato il primo lavoro di Einstein sulla relatività, contiene anche la sua memoria più importante sulla teoria dei quanti, in cui si pongono i presupposti per una verifica sperimentale dell'ipotesi quantistica. Questa teoria che, come la relatività, è un'estensione della meccanica classica, si sviluppa però in direzione differente: mentre la relatività trasforma i precedenti concetti di spazio e di tempo, la teoria quantistica modifica sostanzialmente le nostre concezioni sulla causalità. Diversamente dalle equazioni differenziali della meccanica classica, che hanno un carattere deterministico in quanto consentono rigorose previsioni sul comportamento di un sistema in base alle condizioni iniziali, le leggi della teoria dei quanti sono di tipo statistico, e permettono solo di prevedere le probabilità di eventi futuri. Einstein, che pure aveva contribuito in modo determinante a uno sviluppo in questa direzione, non accettò la successiva sistemazione che queste idee trovarono nella cosiddetta *meccanica quantistica*, poiché riteneva che esse dessero una descrizione parziale della natura e che fosse necessario tornare a una formulazione di tipo deterministico.

Fu questa convinzione a guidarlo nel tentativo di elaborare una teoria unitaria in grado di spiegare non solo l'esistenza del protone e dell'elettrone, ma tutti i risultati generalmente interpretati sulla base della meccanica quantistica. Egli pubblicò molte versioni di teorie unitarie, tutte basate su una generalizzazione della sua teoria del campo metrico, e nella stessa direzione lavorarono anche altri scienziati illustri, Weyl, Eddington, Schrödinger. Ma alla sua morte (1955) si era ancora molto lontani da una formulazione definitiva.

La maggior parte dei fisici non nasconde il proprio scetticismo nei riguardi di queste teorie. Esistono in natura molte altre particelle

instabili (neutrone, mesoni, iperoni, neutrini) che decadono, come gli atomi radiattivi, in altre particelle; poiché la meccanica quantistica associa ad ognuna di esse un diverso campo (i campi d'onda delle particelle materiali, secondo de Broglie), una teoria unitaria dovrebbe poter comprendere nella sua trattazione tutti questi campi.

Il problema viene ad assumere in questo modo un'impostazione differente e dovrebbe essere affrontato da un punto di vista più generale; a Einstein va però riconosciuto il merito di aver insistito sull'importanza di una visione globale dei fenomeni fisici.

L'attuale sviluppo della ricerca segue la strada tracciata da Einstein nel tentativo di arrivare a una teoria unitaria, ma non accetta la sua convinzione che le leggi debbano conservare un carattere deterministico. Una delle due principali direzioni in cui essa procede, si basa esclusivamente sulla relatività speciale e tenta di costruire una legge universale utilizzando le proprietà di simmetria delle interazioni fra le diverse particelle elementari. Le nuove leggi sono caratterizzate dalla loro "non linearità", cioè dal fatto che i termini delle equazioni differenziali sono di grado diverso nelle incognite. (In fisica classica tutte le leggi di propagazione per onde, come per esempio le equazioni di Maxwell, sono lineari; ciò comporta che le onde possano sovrapporsi senza interagire fra loro. Equazioni non lineari si incontrano invece nella descrizione dei moti dei liquidi, cioè in idrodinamica, dove vi è sempre un'azione reciproca fra due correnti di fluido che si sovrappongono.) L'unico criterio di validità nella formulazione di queste leggi è quello della massima semplicità. Questa impostazione è seguita, per esempio, da Heisenberg.

Una seconda direzione di ricerca tende a stabilire delle leggi che siano invarianti rispetto a trasformazioni di carattere estremamente generale, e segue quindi il criterio adottato da Einstein nella relatività generale. Le leggi del campo gravitazionale sono effettivamente non lineari, e questo modo di introdurre la non linearità (seguito per esempio da Green) sembra essere il più naturale.

Ma solo gli studi futuri potranno dirci quale di questi due metodi condurrà all'attesa "legge universale".

14. *Conclusioni*

Quanto abbiamo detto nell'ultimo capitolo sulla fisica moderna e sulle sue applicazioni all'astronomia, dimostra che le idee di Einstein a più di cinquant'anni dal loro apparire non hanno perso niente della loro forza iniziale. Esse hanno liberato la fisica da superate dottrine filosofiche e l'hanno collocata in una posizione di estrema importanza per l'umanità.

Indice analitico

- Aberrazione, 122, 174, 354
Abraham M., 255, 328
Accelerazione, 35, 47, 55, 57, 83
Addizione delle velocità, teorema di
Einstein di, 316
Aepinus U. T., 186
Airy G. B., 177
Ampère A.-M., 215, 219
Analisi dello spettro, 154
Arago J.-F.-D., 131, 137, 166
Azione, a distanza, 141, 145
diretta o per contatto, 142, 145, 212

Bartholin E., 118
Belopol'skij A. A., 161
Biot E. C. e Savart F., legge di, 200,
213, 215, 219
Birifrangenza, 118
Boltzmann L., 228, 428
Bradley J., 122
Brewster D., 131, 136
Bunsen R. W., 154

Campo, elettrico, 183
elettromagnetico, 348
metrico, 398, 402
Carica (elettrica), 181, 346
densità di, 187, 211, 218, 245, 346
Cauchy A. L., 131, 140
Cavendish H., 187
Cinematica, 28, 39, 358

Clausius R. J. E., 223
Coefficienti metrici, 381, 396
Colore, 126, 154, 173
Componenti di un vettore, 41
Condensatore, 194, 204, 208, 213, 235
Conduttività, 198
Conservazione, dell'energia, 67, 331
della quantità di moto, 53, 318
Continuo, 142, 384
bidimensionale, 384
spazio-temporale, 393
Contrazione, ipotesi della, 262, 302
Coordinate gaussiane, 378, 397
Copernico N., 25, 404
Corrente (elettrica), 193, 346
densità di, 199, 215, 219, 346
intensità di, 196, 346
di spostamento, 213
Cosmologia, 19, 423
Costante, dielettrica, 205, 210
elastica, 143
di gravitazione, 87
Coulomb C. A. de, 187, 189
Curvatura, 382, 401
di un'orbita, 40
dello spazio-tempo, 401
di una superficie, 377

Deformazione, 142
Descartes R., 115
Derivate (di una funzione), 144, 225

- Diffrazione, 116, 165
 Dimensioni, 33, 49, 71, 74, 189, 191, 196, 202
 Dinamica, 28, 31, 46, 54, 317
Dirac P. A. M., 430
 Distanza quadridimensionale, 361
Doppler C., effetto, 153, 353, 414
 trasversale, 354
Du Fay C.-F. de C., 181

Eddington A. S., 419, 429, 433
 Effetto termico (di una corrente), 196
Eichenwald A. A., 236, 239
Einstein A., 15, 112, 178, 225, 317, 363
 Elasticità, 30, 139
 Elettrolisi, 194
 Elettroni, 223, 244, 265, 328, 338
 Energia, 67, 329, 334, 338, 341
 cinetica, 71
 inerzia dell', 329, 334
 potenziale, 71
Eötvös R., 64
 Equivalenza, principio di, 367, 394, 418
 Etere, 113, 115, 139, 150, 176, 205, 230, 246, 256, 268
 elastico, 139
 vento di, 161, 165, 176, 262
Euclide, 23, 373
Euler L., 126

Faraday M., 194, 203, 216
 leggi di induzione di, 217
Fitzgerald G. F., 15, 263
Fizeau A.-H.-L., 124, 174
 Fluido di elettricità, 184
 Forza, 29, 53, 73, 325
 apparente (o inerziale), 102
 centrifuga, 104, 365, 373
 elettromotrice, 198
 linee di, 203
 viva, 71

Foucault L., 124
 pendolo di, 109
 Frequenza, 126
Fresnel A.-J., 131, 166, 234, 249, 352

Galilei G., 15, 27, 46, 76, 91, 119
 trasformazione di, 100, 153, 157, 284, 317
Galvani L., 192
Gauss K. F., 190, 376, 386
 Geometria, analitica, 44
 non euclidea, 391
 Giove, satelliti di, 120, 161, 301
Goethè J. W. von, 126
Goldstein E., 160
 Gravitazione, 83, 367, 397
Green G., 131, 190, 434
Helmholtz H. L. F. von, 72, 223, 241, 386, 392
Hertz H. R., 230, 232
 teoria dei conduttori in moto di, 233
Hooke R., 115
Huygens C., 115, 137

 Immagine ottica, 176
 Impulso, 47
 Induzione, corrente di, 236
 magnetica, 215, 219
 Inerzia, 46, 77, 252, 329, 338, 367, 397
 resistenza di, 51, 102, 367
 sistema di, 95, 99, 177, 361
Infeld L., 410
 Interferenza, 126, 164
 Interferometro, 132, 261
 Invarianti, 98, 153, 288, 394
 Ione, 245
 Isotopo, 340

Joule J. P., 72
 legge di, 199

- Kant I.*, 386
Kaufmann W., 256, 329
Kepler J., 27, 77, 81
Kirchhoff G. R., 135, 154
Kohlrausch F. W. G., 202, 218, 223

Lagrange G. L., 131
Laplace P.-S. de, 131, 190, 200
Larmor J., 15, 266
Lebedew P. N., 334
 Legge di causalità, 301
Leibniz G. W. von, 82
Lenard P. E. A. von, 243
Le Verrier U.-J.-L., 90
 Linea, geodetica, 382
 di universo, 45
 tipo tempo e tipo spazio, 312
Lobačevskij N. I., 392
Lodge O. J., 262
Lorentz H. A., 15, 241, 247, 256, 266
 teoria dell'elettrone di, 241
 trasformazioni di, 282, 287, 318, 351, 362
 Luce, anno, 417n.
 linee di, 277, 286
 "naturale", 135
 raggio di, 134
 velocità della, 119, 135, 257, 270, 278, 417
Lucrezio, 114
 Lunghezza, propria, 296
 unità di, 19

MacCullagh J., 149, 229
Mach E., 17, 111, 366, 423
 Magnetismo, 190, 215
Malus E.-L., 131, 136
 Massa, 51, 60, 74, 254, 256, 317, 338
 elettromagnetica, 250
 ed energia, 334, 338
 gravitazionale, 64

 inerziale, 64, 338
 longitudinale e trasversale, 327
 relativistica, 317, 327
 di riposo, 317, 328
Maxwell J. C., 150, 162, 203, 213, 218, 228
 leggi dell'elettromagnetismo di, 222
Mayer R., 72
 Mesoni, 309, 339
 Metrica del continuo spazio-temporale, 392
Michelson A. A. e Morley C. D., esperimento di, 132, 257
Millikan R. A., 245
Minkowski H., 15, 45, 100, 276, 285, 350, 358

Navier L.-M.-H., 131, 140
 Neutrone, 339
Newton I., 28, 76, 116, 118, 126
 citazioni dalle opere, 79
 legge di, 80, 84, 87
Nichols E. F. e Hull A. W., 334
Nicholson S. B. e Carlisle A., 194

Oersted H. C., 200, 215
Ohm G. S., legge di, 198
 Onda, 117, 125
 longitudinale e trasversale, 146
 luminosa, 150, 228
 lunghezza d', 128, 150
 treno d', 129, 156
 Orologi, 293, 304, 413

 Periodo, 126
 Permeabilità, 206
 Perturbazioni, 86, 88
 Peso, 29, 60, 72
 equivalente, 195
Pitagora, 42, 98, 359, 381, 397
Planck M., 15, 357, 433

- Poincaré J.-H.*, 15, 266, 269
Poisson S.-D., 131, 140, 190
 Polarizzazione, 134
 Polo magnetico, 190
 Positrone, 344
 Potenziale, 190
Poynting J. H., 334
 Pressione della radiazione, 334
Priestley J., 187
 Principio, della costanza della velocità della luce, 278
 di equivalenza, 367, 394, 418
 di relatività, 278
 di relatività in meccanica classica, 92, 100
 Protoni, 339
 Punto d'universo, 45, 285, 302, 391

 Quanti, teoria dei, 15, 344, 432
 Quantità di moto, 52, 318, 324, 341

 Radioattività, 341
 Raggi, canale, 160
 catodici, 242
 Relatività, in meccanica classica, 92, 100
 principio di, 278
 Relativizzazione (della forza peso), 85
 Resistenza, 196
Riemann B., 223, 377, 386, 392
Römer O. C., 120, 249, 301
Röntgen W. C., 239
 Rifrazione, 166, 168
 Rotazione assoluta, 105, 109, 363

Schrödinger E., 433
 Simultaneità, 270
 Sincronismo, 271
Sommerfeld A., 135
 Spazio assoluto, 80, 104, 256, 267, 364

 Spettroscopia, 329
 Spostamento verso il rosso (delle righe spettrali), 411
Stark J., 160
Stokes G. G., 148, 167, 234

 Tempo, assoluto, 79
 dilatazione del, 297
 locale, 266, 299
 proprio, 299, 304
 Teoria, cinetica dei gas, 422
 corpuscolare della luce, 115
 elettromagnetica della luce, 223
 ondulatoria della luce, 115
 unitaria dei campi, 432
Thomson J. J., 243, 252
Tolomeo, 24, 404
 Trascinamento della luce, 161, 169, 234, 247, 352
 Trasformazione, formule di, 96, 100, 282, 343, 347, 355

 Unità, *vedi* Dimensioni
 elettromagnetiche, 202
 immaginaria, 360
 Universo, 45, 100
 quadridimensionale, 358, 392, 396

 Velocità, 32
 della luce, 119, 134, 161, 203, 228, 262, 278, 292, 417
 Vibrazioni elastiche, 55, 126
Voigt W., 266n.
Volta A., 192
 pila di, 192

Weber H., 202, 218, 223
Wilson C. T. R., 241, 248

Young T., 126, 131

VI SUGGERIAMO QUESTE ALTRE LETTURE

Il libro che rappresenta l'introduzione ideale a questo di Born è:
 A. Einstein e L. Infeld, *L'evoluzione della fisica* (Universale scientifica Boringhieri, N. 1; 310 pp., L. 900),
 e per quanto riguarda la fisica classica si rimanda senz'altro, per eventuali ulteriori approfondimenti, alle letture suggerite in quel volume.

Riassumendole brevemente, a chiarimento di quanto si dice sul concetto di misura, si consiglia di leggere:

P. W. Bridgman, *La critica operativa della scienza* (Boringhieri, Torino 1969; 454 pp., L. 6000),

P. W. Bridgman, *La logica della fisica moderna* (Universale scientifica Boringhieri, N. 6; 220 pp., L. 1000),

H. Dingler, *Il metodo della ricerca nelle scienze* (Longanesi, Milano 1953; 600 pp., L. 2500),

a cui si potranno aggiungere:

E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (Boringhieri, Torino 1968; 509 pp., L. 6000),

e una brillante ricapitolazione che può essere il preludio di ogni successivo approfondimento:

K. O. Friedrichs, *I concetti matematici elementari della fisica* (Universale scientifica Boringhieri, N. 27; 144 pp., L. 1000).

Per approfondire la parte che riguarda la fisica pregalileiana e il concetto di spazio, si consiglia rispettivamente:

S. Sambursky, *Il mondo fisico dei greci* (Feltrinelli, Milano 1959; 315 pp., L. 500),

M. Jammer, *Storia del concetto di spazio* (ivi 1963; 187 pp., L. 500).

Per ampliare e inquadrare la discussione sulle teorie cosmologiche:

- D. W. Sciama, *L'unità dell'universo* (Einaudi, Torino 1965; 195 pp., L. 1500),
W. Bonnor, *Universo in espansione* (Universale scientifica, Boringhieri, N. 20; 220 pp., L. 1000),
H. Bondi, *Sguardi sull'universo* (Zanichelli, Bologna 1964; 128 pp., L. 600),
H. Bondi, *Teorie cosmologiche rivali* (Einaudi, Torino 1965; 78 pp., L. 500).

Sull'argomento della cosmologia le pagine più aggiornate si troveranno in:
L. Gratton, *Relatività, cosmologia e astrofisica* (Universale scientifica Boringhieri, N. 33; 235 pp., L. 1000).

Per la parte che più specificatamente riguarda la relatività, un ottimo complemento didattico è costituito dal volume:

- C. V. Durell, *La relatività con le quattro operazioni* (Universale scientifica Boringhieri, N. 15; 208 pp., L. 1000)

con la sua scelta di esercizi e la sua esposizione lineare. Altre esposizioni divulgative della teoria della relatività che segnaliamo sono:

- H. Bondi, *La relatività e il senso comune* (Zanichelli, Bologna 1965; 152 pp., L. 800),
A. S. Eddington, *Spazio, tempo e gravitazione: teoria della relatività generale* (Boringhieri, Torino, rist. 1966; 257 pp., L. 2800),
A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa* (Universale scientifica Boringhieri, N. 24; 325 pp., L. 1000),

volume, quest'ultimo, in cui oltre alla fondamentale opera di Einstein, il lettore troverà una scelta delle storiche pagine di Descartes, Newton, Lobačevskij, Riemann, Helmholtz, Maxwell, Poincaré. Per approfondire l'argomento, ma con l'avvertenza che le cognizioni matematiche richieste sono a livello universitario, la lettura migliore è:

- A. Einstein, *Il significato della relatività* (Boringhieri, Torino, rist. 1968; 227 pp., L. 3800).

Per la meccanica quantistica, consigliamo per il suo carattere interdisciplinare:

- N. Bohr, *I quanti e la vita* (Universale scientifica Boringhieri, N. 5; 236 pp., L. 1000),

per la sua vastità:

- S. Tolansky, *Introduzione alla fisica atomica* (Universale scientifica Boringhieri, NN. 11/12; 520 pp., L. 1800),

e rimandiamo il lettore alla bibliografia contenuta in:

- C. N. Yang, *La scoperta delle particelle elementari* (Universale scientifica Boringhieri, N. 37; 93 pp., L. 1000).

Concludiamo con alcune opere di Born che potranno interessare il lettore:

- M. Born, *Riflessioni d'un uomo di scienza europeo*, in M. Born, W. Heisenberg, E. Schrödinger e P. Auger, "Discussione sulla fisica moderna" (Boringhieri, Torino, ult. rist. 1969; 137 pp., L. 2000),
M. Born, *Filosofia naturale della causalità e del caso* (ivi, rist. 1967; 266 pp., L. 3000),
M. Born, *Fisica atomica* (ivi 1968; 529 pp., L. 5000),
M. Born, *Il potere della fisica* (ivi, 1962, 144 pp., L. 1600).

Universale scientifica Boringhieri

- 1 Albert Einstein e Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica
- 2 Sigmund Freud, Psicopatologia della vita quotidiana
- 3 J. von Neumann, G. Ryle, C. E. Shannon, C. Sherrington, A. M. Turing, N. Wiener e altri, La filosofia degli automi, a cura di Vittorio Somenzi
- 4 Albert Einstein, Pensieri degli anni difficili
- 5 Niels Bohr, I quanti e la vita
- 6 P. W. Bridgman, La logica della fisica moderna
- 7/8/9 J. G. Frazer, Il ramo d'oro
- 10 I. P. Pavlov, I riflessi condizionati
- 11/12 Samuel Tolansky, Introduzione alla fisica atomica
- 13 Jean Piaget, La rappresentazione del mondo nel fanciullo
- 14 Norbert Wiener, Introduzione alla cibernetica
- 15 C. V. Durell, La relatività con le quattro operazioni
- 16 J. Z. Young, La fabbrica della certezza scientifica
- 17 Ernest Borek, Il codice della vita
- 18/19 Eric Roll, Storia del pensiero economico
- 20 William Bonnor, Universo in espansione
- 21 C. G. Jung, L'Io e l'inconscio
- 22/23 Charles Darwin, L'origine delle specie
- 24 Albert Einstein, Relatività: esposizione divulgativa e Newton, Riemann, Helmholtz, Maxwell, Poincaré e altri su Spazio Geometria Fisica, a cura di Bruno Cernignani
- 25 C. V. Brewer, l'organizzazione del sistema nervoso
- 26 Marthe Bonvallet, Veglia e sonno
- 27 K. O. Friedrichs, I concetti matematici elementari della fisica
- 28 C. G. Jung, Psicologia dell'inconscio
- 29 Sigmund Freud, Psicoanalisi infantile
- 30/31 B. M. Foss (a cura di), I nuovi orizzonti della psicologia
- 32 A. I. Kitaigorodskij, Ordine e disordine nel mondo degli atomi
- 33 Livio Gratton, Relatività Cosmologia Astrofisica
- 34 G. E. Fogg, La vita e la crescita delle piante
- 35 Oskar Morgenstern, Teoria dei giochi
- 36 Sigmund Freud, Totem e tabù
- 37 C. N. Yang, La scoperta delle particelle elementari
- 38 K. S. Lashley, W. S. McCulloch, R. W. Sperry, W. H. Thorpe, N. Wiener e altri, La fisica della mente, a cura di Vittorio Somenzi
- 39/40 Sigmund Freud, Introduzione alla psicoanalisi
- 41 D'Arcy Thompson, Crescita e forma
- 42 Bronislaw Malinowski, Sesso e repressione sessuale tra i selvaggi
- 43 Kenneth Mather, Le differenze fra gli uomini
- 44/45 Max Born, La sintesi einsteiniana